3.20 – Esercizio di Riepilogo sulle Funzioni

Siano: $X := \{-2; +2; +4; +6\}$ e $Y := \{+1; +4; +16; +36\}$.

consideriamo adesso la seguente *Funzione f* definita come segue :

$$y = f(x) :\Leftrightarrow y = x^2 \quad ; \quad x \in X \ , \ y \in Y$$

$$\text{Ovvero: } f(x) = x^2 \quad ; \quad x \in X$$

Consegne

a) Determinare Dom f ;
b) Determinare Graph f;
c) Fare la *Rappresentazione Sagittale* e quella *Cartesiana* di f.
d) Determinare Codom f;
e) Stabilire spiegandolo, se f è una *Funzione Iniettiva*.
f) Stabilire spiegandolo, se f è una *Funzione Suriettiva*.
g) Stabilire spiegandolo, se f è una *Funzione Biettiva*.
h) Determinare la *Funzione Inversa di f*.
i) Trovare una *Restrizione g di* $f: X \to \text{Codom} f$ t.c. *g Iniettiva* ed *Invertibile*.
j) Rappresentare Graph g^{-1}; nel *Piano Cartesiano*.

Svolgimento

a) Per definizione: $\text{Dom} f = X := \{-2; +2; +4; +6\}$

b) Determinare Graph f vuol dire ricercare le *Coppie Ordinate* $(x;y)$ tali che il secondo elemento $y \in Y$, sia pari al quadrato del primo. Considerando uno per volta tutti gli elementi del Dom f possiamo osservare che :

$$(-2)^2 = +4 \in Y \Rightarrow f(-2) = +4 \Rightarrow +4 \in f(X) \quad ; \quad -2 \in X \ , \ +4 \in Y$$

$$(+2)^2 = +4 \in Y \Rightarrow f(+2) = +4 \Rightarrow +4 \in f(X) \quad ; \quad +2 \in X \ , \ +4 \in Y$$

$$(+4)^2 = +16 \in Y \Rightarrow f(+4) = +16 \Rightarrow +16 \in f(X) \quad ; \quad +4 \in X \ , \ +16 \in Y$$

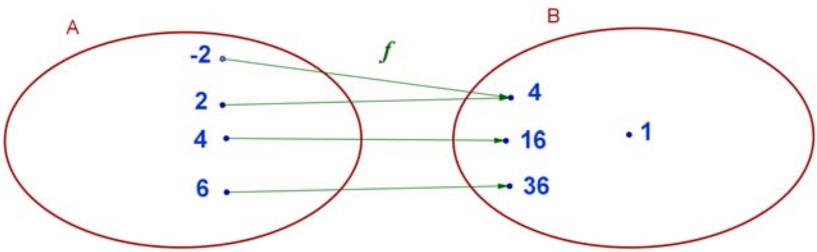
$$(+6^2) = +36 \in Y \Rightarrow f(+6) = +36 \Rightarrow +36 \in f(X) \quad ; \quad +6 \in X \ , \ +36 \in Y$$

c) Adesso che f è determinato, possiamo rappresentarlo nelle altre due forme a noi note.

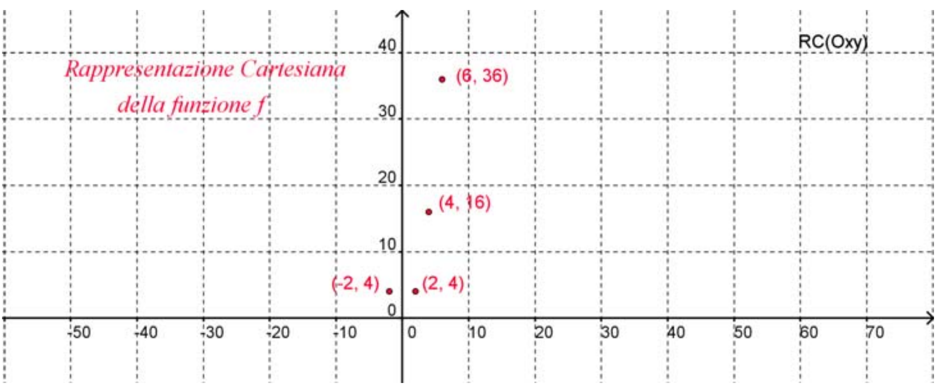
- *Rappresentazione Estensiva .*

$$\text{Graph } f := \{ \ (x;y) \ | \ x \in \text{Dom} f \ \wedge \ y \in Y \ \wedge \ y = f(x) \ \} =$$
$$= \{ \ (-2 \,;+4 \,) \,; (+2 \,;+4 \,) \,; (+4 \,;+16 \,) \,; (+6 \,;+36 \,) \}.$$

- *Rappresentazione Sagittale.* Si rappresentano i due insiemi: l'*Insieme di Partenza* e l'*Insieme di Arrivo* dopodiché con delle frecce si riportano i legami tra i due insiemi.



Rappresentazione Cartesiana. Si rappresentano quindi i punti secondo il metodo informalmente detto *Metodo della Battaglia Navale*:



d) Per definizione, il Codom *f* è il sottoinsieme delle *y* dell'*Insieme di Arrivo Y* che hanno una *Contro-immagine*, pertanto :

$$\text{Codom } f = \{ +4 \,;\, +16 \,;\, +36 \} \subset Y$$

e) *f* è una *Funzione Iniettiva* se comunque prendiamo due elementi distinti del Dom *f*, anche le loro *Immagini* sono *Distinte*. Ciò però non si verifica in quanto esistono due differenti elementi del Dom *f*, ovvero $x_1 := -2\,,\ x_2 := +2$ che però hanno la stessa immagine $y = 4$.

In *Matematichese*:

$$\exists x_1 := -2\,,\ x_2 := +2 \in X \ :\ x_1 = -2 \neq +2 = x_2 \wedge f\left(x_1\right) = +4 = f\left(x_2\right)$$

$$\text{CONCLUSIONE :}\ \ f\ \textit{Funzione}\ \text{NON}\ \textit{Iniettiva}\,.$$

f) *f* NON è una *Funzione Suriettiva* in quanto, se lo fosse, comunque prendessimo un elemento dell'*Insieme di Arrivo Y*, per esso riusciremmo a fornire una *ControImmagine*. Ciò però non si verifica in quanto esiste un elemento di *Y*, ovvero $\overline{y} := +1$ che non ha alcuna contro-immagine.

In *Matematichese*: $\exists \overline{y} := +1 \in Y \ \ \forall x \in X \ :\ f\left(x\right) \neq \overline{y}$

CONCLUSIONE: *f Funzione* Non *Suriettiva*.

g) Per un'osservazione precedente, risulta che :

f Funzione Non *Biettiva* poiché *f* Non *Iniettiva* ed *f Funzione* Non *Suriettiva* (in realtà per affermare la tesi basterebbe anche solo una delle due asserzioni).

Dunque, in *Matematichese* :

$$\neg\left[f\ \textit{Funzione Iniettiva} \right] \underset{\text{CARATTERIZZAZIONE}}{\Longrightarrow} \neg\left[f\ \textit{Funzione Biettiva} \right]$$

h) Banalmente, per definizione, poiché *f* Non *Biiettiva*, risulta che: *f Funzione Non Invertibile* e quindi la risposta al **Quesito (h)** è che, non è possibile determinare la *Funzione Inversa di f*.

Dunque, in matematichese :

$$\neg[\, f \text{ Funzione Biettiva} \,] \underset{\text{DEFINIZIONE}}{\Longrightarrow} \neg[\, f \text{ Funzione Invertibile} \,]$$

i) Come, *Restrizione g della Funzione*:

$$f : X \to \text{Codom } f$$

t.c. *g Iniettiva* definiamo una *Funzione g* come segue:

$$g : \text{Dom}\, g \to Y$$

con:

$$\text{Dom}\, g := \{-2\,;+4\,;+6\} \subseteq X = \text{Dom } f$$

$$x_1 = -2 \mapsto g(x_1) = f(x_1) = f(-2) = +4$$

$$x_2 = +4 \mapsto g(x_2) = f(x_2) = f(4) = +16$$

$$x_3 = +6 \mapsto g(x_3) = f(x_3) = f(6) = +36$$

tale *Funzione g* per definizione è una *Restrizione di f*.

Inoltre risulta che :

- *g Iniettiva*: in quanto, comunque prendiamo due elementi <u>distinti</u> del Dom *f*, anche le loro *Immagini* sono distinte **(*)**.
- *G Suriettiva*: in quanto banalmente, l'*Insieme di Arrivo di g* è Codom *f* che coincide proprio con il Codom *g* (******).

Dunque, per **(*)** e per **(**)**: *g Biettiva* e pertanto, per definizione, *g Funzione Invertibile*.

j) Si osservi che, la *Funzione g* appena costruita è, vista la corrispondenza uno a uno degli elementi del Dom *g*, per definizione, una *Funzione Biiettiva* e quindi una *Funzione Invertibile*.

Per rappresentare il Graph g^{-1} nel *Piano Cartesiano*, basta seguire il procedimento dettagliato in teoria. Il risultato è rappresentato nella figura seguente con i punti indicati con "triangolino" blu.