3.24 Ricerca delle Simmetrie di una Funzione

Come tutte le curve del piano, il Graph f potrebbe presentare delle simmetrie. Di particolare interesse per le funzioni, sono le due che definiremo a seguire.

3.24.a) Definizione di Funzioni Pari

Sia $f : \mathrm{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che:

$$f \text{ Funzione Pari } :\Leftrightarrow \text{ Graph } f \text{ Simmetrico risp. } Asse\_y$$

Osservazione / si tratta evidentemente si una *Simmetria Assiale* con *Asse di Simmetria* coincidente con l'*Asse y*.

Dal punto di vista pratico, dimostrare che una *Funzione* è *Pari* con la definizione non è affatto agevole, pertanto, si utilizza la seguente caratterizzazione.

3.24.b) Caratterizzazione di Funzioni Pari

Data $f : \mathrm{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, risulta che:

$$f \text{ Funzione Pari} \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

3.24.c) Esempio di Funzione Pari

I Esempio:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto y = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Infatti: $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 =: f(x)$

II Esempio:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to [-1; 1] \\ x &\mapsto y = \cos x \end{aligned}$$

Infatti: $f(-x) = \left(\cos(-x)\right) = [\text{Archi Associati Opposti}] = \cos x =: f(x)$

3.24.d) Definizione di Funzioni Dispari

Sia $f : \mathrm{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che:

$$f \text{ Funzione Dispari } :\Leftrightarrow \text{ Graph } f \text{ Simmetrico risp. all'} Origine\ degli\ Assi$$

Osservazione: si tratta evidentemente si una *Simmetria Centrale*.

Dal punto di vista pratico, dimostrare che una funzione è *Pari* con la definizione non è affatto agevole, pertanto, si utilizza la seguente caratterizzazione.

3.24.e) Caratterizzazione di Funzioni Dispari

Data $f : \mathrm{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, risulta che:

$$\underline{f \textbf{ Funzione Dispari}} \Leftrightarrow \quad -f(-x) = f(x)$$

3.24.f) Esempio di Funzione Dispari

I Esempio :
$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto y = x^3 \end{aligned}$$

Infatti: $-f(-x) = -(-x)^3 = -\left(-x^3\right) = +x^3 =: f(x)$

II Esempio:
$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \to [-1;1] \\ x &\mapsto y = \sin x \end{aligned}$$

Infatti:

$$-f(-x) = -\left(\sin(-x)\right) = [\text{Archi Associati Opposti}] = -\left(-\sin x\right) = +\sin x =: f(x)$$

3.24.g) Osservazione

Poiché una *funzione*, per come è definita, non può avere un **Graph *f*** simultaneamente *Simmetrico rispetto all'Asse y* e *Simmetrico rispetto all'Origine O*, risulta che una stessa *Funzione f* non può essere sia una *Funzione Pari* che una *Funzione Dispari*.