13.4 - Limite Finito di una Funzione per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

$f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 *Punto di Accumulazione per* Dom f

Allora, definiamo:

13.4.a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f - \{x_0\} : \left[x \in \mathrm{I}_{\delta_\varepsilon}(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{I}_\varepsilon(l) \right]$$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f - \{x_0\} : \left[|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right]$$

cioè, l è un *Limite Finito di f*(x) per x che tende ad un *Punto di Accumulazione* x_0 *Finito*, se e soltanto se comunque scelto un valore $\varepsilon > 0$, (piccolo a piacere) vale la seguente *Proposizione*:

Esiste un *Intorno di* x_0 e *di Raggio* δ indicato con $\mathrm{I}_{\delta\varepsilon}(x_0)$ tale che per un qualunque elemento x del *Dominio* (eccetto al più x_0) vale che:

[se x appartiene a tale *Intorno*, allora, la sua *Immagine* $f(x)$ appartiene ad un *Intorno di Centro* l e *Raggio* ε indicato con $\mathrm{I}_\varepsilon(l)$].

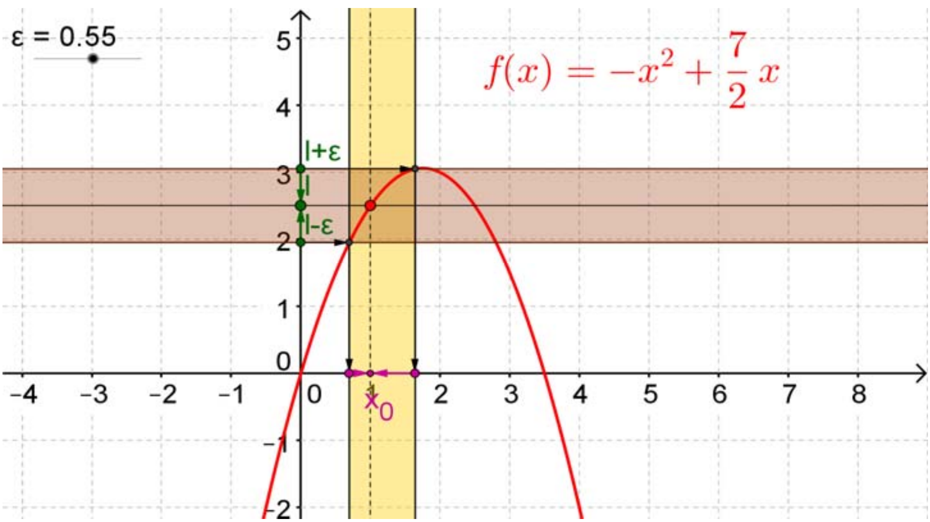

Grafico con ε = 0,55. Si osserva che quando x si avvicina dal basso o dall'alto al *punto di accumulazione* x_0, la corrispondente immagine $y=f(x)$ si avvicina sempre più al valore l.

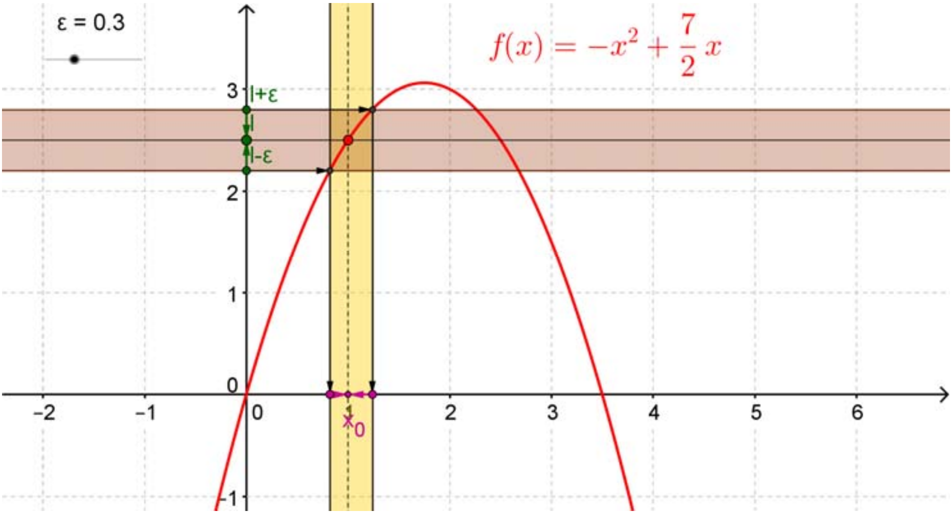

Grafico con ε = 0,30

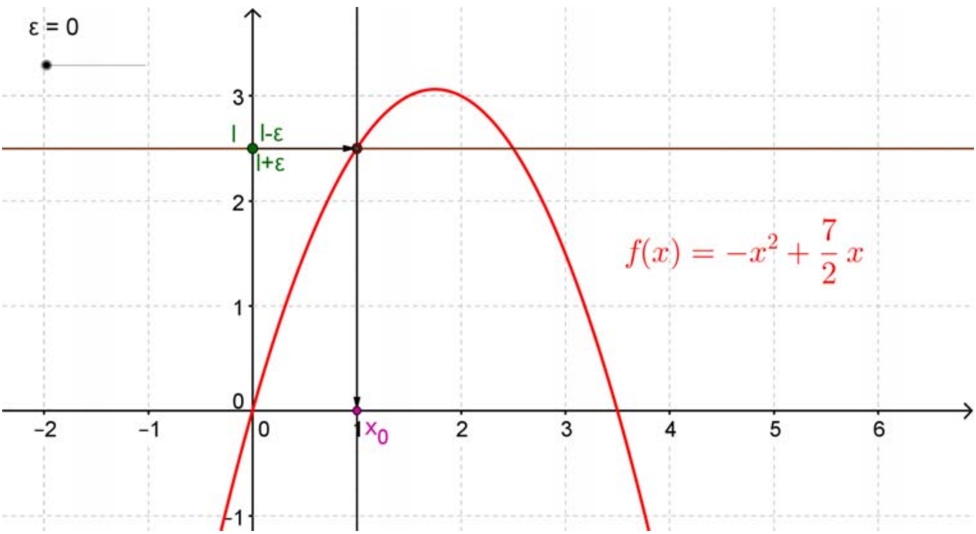

Grafico con ε = 0. Si osserva che quando x raggiunge (da destra e da sinistra) il *Punto di Accumulazione* x_0, la corrispondente immagine $y=f(x)$ raggiunge il valore l.