ESERCIZIO N°MATH.I / "CORSO MATEMATICA VERDE (LICEI NS)" - B.T.B. PG.584.090 ("SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI DETERMINATI / METODO DI RIDUZIONE")

Risolvere con il *Metodo di Riduzione* il seguente sistema di equazioni lineari, dopo aver stabilito se esso è *determinato, indeterminato* o *impossibile*.

$$\begin{cases} +3x-4=+5y \\ +2y+x=\ \ +1 \end{cases}$$

Si richiede la verifica geometrica del risultato ottenuto.

Svolgimento

Il primo passo da compiere è come al solito portare il sistema assegnato in *Forma Standard*.

$$\begin{cases} +3x-4=+5y \\ +2y+x=\ \ +1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +3\cdot x-5\cdot y=+4 \\ +1\cdot x+2\cdot y=\ +1 \end{cases}$$

Prima di affrontare lo studio algebrico del sistema, è necessario stabilire se esso è *determinato*, *indeterminato* o *impossibile*.

A tal fine si utilizzerà il seguente teorema:

Teorema

Dato un generico *Sistema Lineare* in forma standard: $\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$

risulta che:

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Determinato	[Le due Rette Associate al Sistema sono Incidenti e quindi si Intersecano in un Unico Punto]
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Impossibile	[Le due Rette Associate al Sistema sono Parallele e quindi Non si Intersecano Mai]
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Indeterminato	[Le due Rette Associate al Sistema sono Coincidenti e quindi si Intersecano in Infiniti Punti]

$$\Rightarrow \begin{cases} +3\cdot x-5\cdot y=+4 \\ +1\cdot x+2\cdot y=+1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{+3}{+1}=+3 \\ \dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{-5}{+2}=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \text{Sistema Determinato} \left[\begin{array}{l}\text{Le due Rette Associate al Sistema sono Incidenti} \\ \text{e quindi si Intersecano in un Unico Punto } (r \between s)\end{array}\right]$$

Soluzione del Sistema (Metodo di Riduzione)

$$\begin{cases} +3\cdot x-5\cdot y=+4 \\ \boxed{+1\cdot x+2\cdot y=+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\begin{cases} +3\cdot x-5\cdot y=+4 \\ +1\cdot x+2\cdot y=+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +3\cdot x-5\cdot y=+4 \\ +3\cdot x+6\cdot y=+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{Metodo di Riduzione: I Equaz. - II Equaz.} \\ \text{(Sottrazione membro a membro)}\end{array}\right] \Rightarrow (+3\cdot x-5\cdot y)-(+3\cdot x+6\cdot y)=(+4)-(+3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{+3\cdot x}-5\cdot y\,\cancel{-3\cdot x}-6\cdot y=+4-3 \Rightarrow -11\cdot y=+1 \Rightarrow 11\cdot y=-1 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{11}}$$

Con il *Metodo di Riduzione* si riesce quindi a calcolare agevolmente una delle due coordinate del *Punto di Intersezione delle Due Rette r* ed *s*. Per determinare anche l'altra *Coordinata Cartesiana* si utilizzerà il *Metodo di Sostituzione* semplicemente "sostituendo" la coordinata calcolata nell'equazione del sistema che si ritiene più semplice (nel nostro caso è stata riquadrata nel *Sistema in Forma Standard*).

$$\begin{cases} \boxed{x+2\cdot y=+1} \\ y=-\dfrac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2\cdot y \\ y=-\dfrac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{11}\right)=1+\dfrac{2}{11}=\dfrac{11+2}{11}=+\dfrac{13}{11} \\ y=-\dfrac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\text{Graph}(r)\cap\text{Graph}(s)=\left\{\left(+\frac{13}{11};-\frac{1}{11}\right)\right\}\approx\{(+1,2\ ;-0,1)\}$$

Rappresentazione Geometrica e Verifica della Soluzione del Sistema

Alle *Equazioni Lineari* di partenza sono associabili due rette del *Piano Cartesiano*, si procede con la loro rappresentazione.

$$\boxed{r:+3\cdot x-5\cdot y-4=0} \quad [\ \textit{Retta } r \text{ in } \textit{Forma Implicita}\ ]$$

$$\boxed{s:\ x+2\cdot y-1=0} \quad [\ \textit{Retta } s \text{ in } \textit{Forma Implicita}\ ]$$

Si prosegue trasformando le *Rette* in *Forma Esplicita* e successivamente determinando i loro *Punti di Intersezione* con gli *Assi Cartesiani*.

Retta *r*

$$r:+3\cdot x-5\cdot y-4=0 \Rightarrow r:-5\cdot y=-3\cdot x+4 \Rightarrow r:\ 5\cdot y=+3\cdot x-4 \Rightarrow r:\ \frac{\cancel{5}\cdot y}{\cancel{5}}=+\frac{3\cdot x}{5}-\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r:\ y=+\frac{3}{5}\cdot x-\frac{4}{5}} \quad [\ \textit{Retta } r \text{ in } \textit{Forma Esplicita}\ ]$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta r* con l'*Asse x*:

$$\text{Graph}(r)\cap(Asse.x):\begin{cases} y=+\frac{3}{5}\cdot x-\frac{4}{5} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{3}{5}\cdot x-\frac{4}{5}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{3}{5}\cdot x=+\frac{4}{5} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{{}^1\cancel{5}}{{}^1\cancel{3}}\cdot\frac{{}^1\cancel{3}}{{}^1\cancel{5}}\cdot x=+\frac{4}{{}^1\cancel{5}}\cdot\frac{{}^1\cancel{5}}{3} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=+\frac{4}{3} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Graph}(r)\cap(Asse.x)=\left\{\left(+\frac{4}{3};0\right)\right\}.$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta r* con l'*Asse y*: $\text{Graph}(r)\cap(Asse.y)=\{(0;q)\}=\left\{\left(0;-\frac{4}{5}\right)\right\}$.

Retta *s*

$$s:x+2\cdot y-1=0 \Rightarrow s:+2\cdot y-1=-x+1 \Rightarrow \frac{{}^1\cancel{+2}}{{}^1\cancel{+2}}\cdot y=\frac{-x}{+2}+\frac{+1}{+2} \Rightarrow s:y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{s:y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}} \quad [\ \textit{Retta } s \text{ in } \textit{Forma Esplicita}\ ]$$

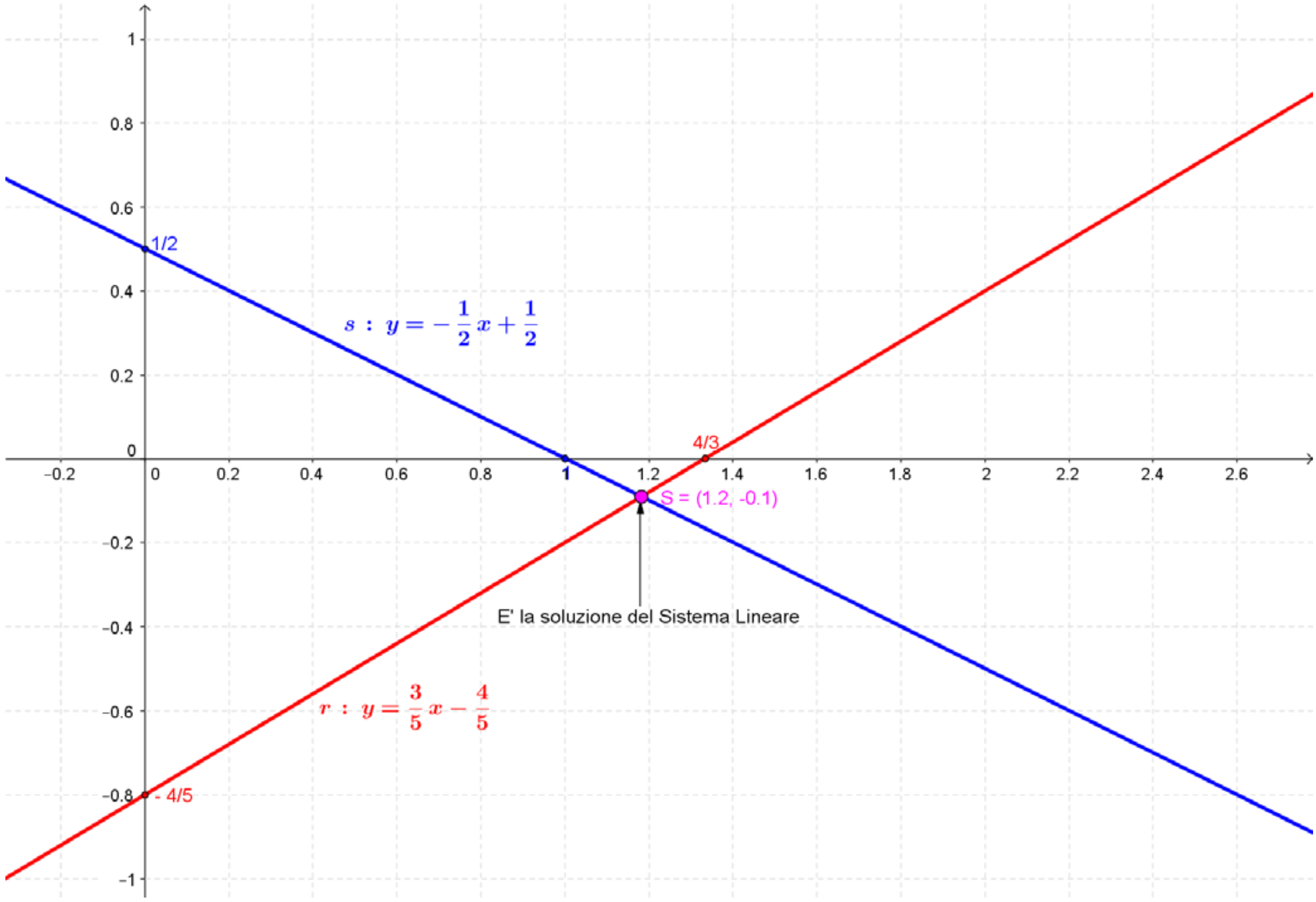
Calcolo delle intersezioni della *Retta s* con l'*Asse x*:

$$\text{Graph}(s)\cap(Asse.x):\begin{cases} y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot x=-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Graph}(s) \cap (Asse.x) = \{(+1;0)\}$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta s* con l'*Asse y*: $\text{Graph}(s) \cap (Asse.y) = \{(0;q)\} = \left\{\left(0;+\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Rappresentazione Grafica



$$\Rightarrow S = \text{Graph}(r) \cap \text{Graph}(s) = \left\{\left(+\frac{13}{11}; -\frac{1}{11}\right)\right\}$$

☺ ***Verifica Geometrica*: ESITO POSITIVO!** ☺