5.03.h) Velocità Angolare (Moto Circolare Vario)

Il *Moto*, non necessariamente uniforme, di un *Punto Materiale* su una *Traiettoria Circolare* può essere efficacemente descritto utilizzando, anziché lo spazio percorso lungo la *Circonferenza* e la *Velocità Tangenziale*, le corrispondenti variabili angolari, cioè l'*Angolo al Centro Descritto Durante il Moto* e la *Velocità Angolare*.

In analogia alla *Velocità Media*, definiamo come segue la *Velocità Angolare Media*.

5.03.i) Velocità Angolare Media (Moto Circolare Vario)

Se un *Punto Materiale* si muove su una *Traiettoria Circolare*, si definisce **Velocità Angolare Media** è il rapporto tra l'angolo $\Delta\vartheta$ (misurato in radianti) spazzato dal *Raggio Vettore* nell'*Intervallo di Tempo* $\Delta t = t_f - t_i$ e l' *Intervallo di Tempo* ΔT stesso:

$$\omega_m = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta T} = \frac{\vartheta(t_f) - \vartheta(t_i)}{t_f - t_i}$$

Se il *Moto Circolare non è Uniforme*, la *Velocità Angolare Media* assume valori diversi al variare dell'*Intervallo di Tempo* considerato.

5.03.*l*) Velocità Angolare Istantanea (Moto Circolare Vario)

Se un *Punto Materiale* si muove su una *Traiettoria Circolare*, si definisce **Velocità Angolare Istantanea in un Generico Istante t** il valore a cui tende la *Velocità Angolare Media*, calcolata nell'*Intervallo di Tempo* $\Delta t = t_f - t_i$, al tendere di ΔT a zero ovvero quando ΔT tende a diventare infinitamente piccolo e quindi i due istanti t_i e t_f a confondersi tra loro.

In termini matematici rigorosi ciò si esprime con la seguente

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta T} =: \frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{(Derivata dell'Angolo risp. al Tempo)}$$

La *Derivata* in matematica misura la rapidità con cui cambia una variabile (che in questo caso è l'angolo $\vartheta(t)$.

5.03.m) Velocità Angolare nel MCU

$$\omega(t) = \omega_m = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta T} = \frac{\vartheta(t_f) - \vartheta(t_i)}{t_f - t_i} =: \omega$$

Nel MCU la *Velocità Angolare Media* e la *Velocità Angolare Istantanea* coincidono in quanto nel MCU il *Raggio Vettore* spazza *Angoli al Centro Uguali* in *Tempi Uguali*. Per comodità, in caso di MCU essendo la *Velocità Angolare* indipendente dal *Tempo* la si indicherà semplicemente con ω.

Alla *Velocità Angolare* si attribuisce segno positivo o negativo a seconda che la punta del *Raggio Vettore* percorra la circonferenza nel verso scelto come positivo o nel verso opposto. Allo stesso modo, anche l'angolo $\vartheta(t)$ deve essere inteso come un *Angolo Orientato*, cioè dotato di segno con la stessa convenzione della *Velocità Angolare*.

- - Unità di Misura della Velocità Angolare (SI)

L'unità di misura della velocità angolare nel SI, in cui gli *Angoli* sono espressi in *Radianti* (simbolo: **rad**), è il:.

$$\mathbf{rad/s = rad \cdot s^{-1}}$$

- - Equazione Dimensionale della Velocità Angolare

Poiché il *Radiante* è un'unità adimensionale, cioè un numero puro, le dimensioni fisiche della *Velocità Angolare* sono le stesse della *Frequenza*, cioè sono espresse dall'inverso di un *tempo*:

$$[\omega] = [\, t \,]^{-1}$$

La *Velocità Angolare* e la *frequenza* di un *Moto Circolare Uniforme* esprimono, tuttavia, due grandezze diverse: la *frequenza* il *numero di giri* compiuti in un *secondo*, mentre la *Velocità Angolare* indica i *Radianti* spazzati in un secondo dal *Raggio Vettore*.

Dalla relazione illustrata nel [§5.03(m)], si ricava analogamente a come si fa nel MRU la *Legge Oraria delle Posizioni Angolari* nel MCU.

5.03.n) Legge Oraria della Posizione Angolare nel MCU

L'*Angolo Spazzato dal Raggio Vettore* in funzione del *Tempo* è espresso dalla seguente legge oraria:

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_i) + \omega \cdot (t - t_i)$$

5.03.o) Valore della Velocità Angolare nel MCU

L'*Angolo Spazzato dal Raggio Vettore* in funzione del *Tempo* è espresso dalla seguente legge oraria:

$$\omega = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta T} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

<u>Commento</u>

La *Velocità Angolare in un* MCU assume questo valore in quanto l'*Angolo Spazzato dal Raggio Vettore in un Periodo T* è l'*Angolo Giro*, cioè 2π radianti.

<u>Esempio</u>

Calcolare la *Frequenza* e la *Velocità Angolare* di un CD che compie 300 giri al minuto.

Soluzione

Fissata la nostra attenzione su un singolo *Punto Materiale del CD*, si ha che la *Frequenza* con cui esso compie un MCU intorno all'*Asse di Rotazione del Disco*, per definizione è data da:

$$f = \frac{300 \text{ giri}}{1 \text{ min}} = \frac{300 \text{ giri}}{60{,}0 \text{ s}} = 5{,}00 \cdot 10^{0} \text{ Hz}$$

Per il calcolo della *Velocità Angolare* con cui ruota il *Punto Materiale* si utilizza la [§5.03(o)].

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad}) \cdot (5{,}00 \text{ Hz}) = (2\pi \cdot 5{,}00) \cdot \left(\text{rad} \cdot \frac{1}{\text{s}}\right) = 31{,}4 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3{,}14 \cdot 10^{+1} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

5.03.p) Relazione tra Velocità Tangenziale e Velocità Angolare nel MCU

La *Velocità Angolare* può essere messa in relazione con la *Velocità Scalare*. Se un *Punto Materiale* percorre una *Traiettoria Circolare di Raggio R*, la sua *Velocità Tangenziale* $\vec{v}$ e la sua *Velocità Angolare* $\vec{\omega}$ soddisfano la relazione:

$$\boxed{v = \omega \cdot R}$$

Dimostrazione

$$v = \left[\S 5.03(\mathrm{e})\right] = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi}{T} \cdot R = \left[\S 5.03(\mathrm{o})\right] = \omega \cdot R$$

5.03.q) Relazione tra Velocità Tangenziale e Velocità Angolare nel MCV

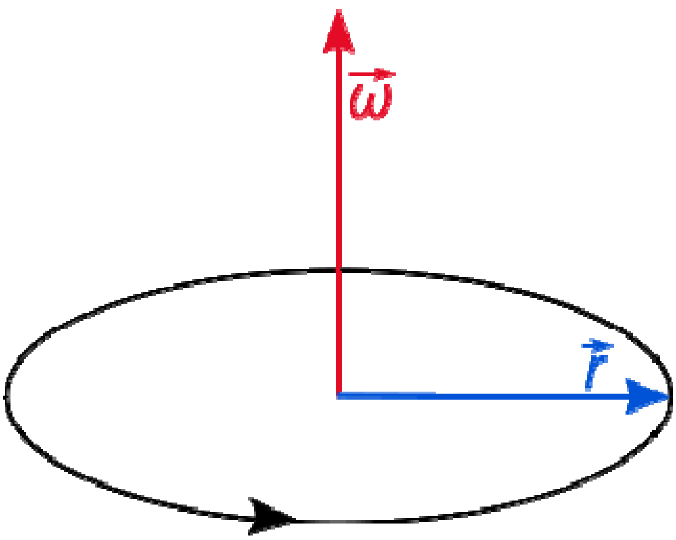
La relazione precedente è stata ricavata nel caso di MCU, ma in realtà è valida anche se la *Traiettoria Circolare* è percorsa con *Velocità Scalare Variabile*. In tal caso le grandezze in gioco devono essere intese come istantanee e dunque non costanti:

$$\boxed{v(t) = \omega(t) \cdot R}$$

5.03.r) Vettore Velocità Angolare

La *Velocità Angolare* è una *Grandezza Vettoriale* così definita:

$$\begin{cases} \mathrm{mod}(\vec{\omega}):\ \omega = \dfrac{\Delta \vartheta}{\Delta T} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ \mathrm{dir}(\vec{\omega}) \perp \mathrm{Piano}\left(\vec{R}\,;\vec{v}\right) \\ \mathrm{vrs}(\vec{\omega}) : \text{ Regola della Mano Destra} \end{cases}$$



La *Direzione del Vettore* $\vec{\omega}$ è ortogonale al *Piano* della *Traiettoria* e il *Verso* individuato dalla *Regola della Mano Destra*. Come illustrato in figura, tenendo la mano destra con le dita piegate secondo il *Verso del Moto* sulla *Traiettoria Circolare*, il pollice indica la *Direzione* e il *Verso* del *Vettore Velocità Angolare*.