5.03.s) Accelerazione Centripeta nel Moto Circolare Uniforme

Nel paragrafo [§5.02] abbiamo visto che un *Punto Materiale in Moto Uniforme su una Circonferenza* è soggetto a un'*Accelerazione* diretta verso il centro della circonferenza. L'espressione analitica di tale *Accelerazione* è data dal seguente teorema.

Teorema

Dato un *Punto Materiale* in moto su una *Circonferenza di Raggio R* con *Velocità Tangenziale* di modulo *v* è soggetto a una *Accelerazione Centripeta* a_C di modulo dato da una delle due seguenti espressioni:

$$\text{I)}\quad a_C = \frac{v^2}{R}\ ;\text{II)}\quad a_C = \omega^2 \cdot R\ .$$

Osservazione Importante

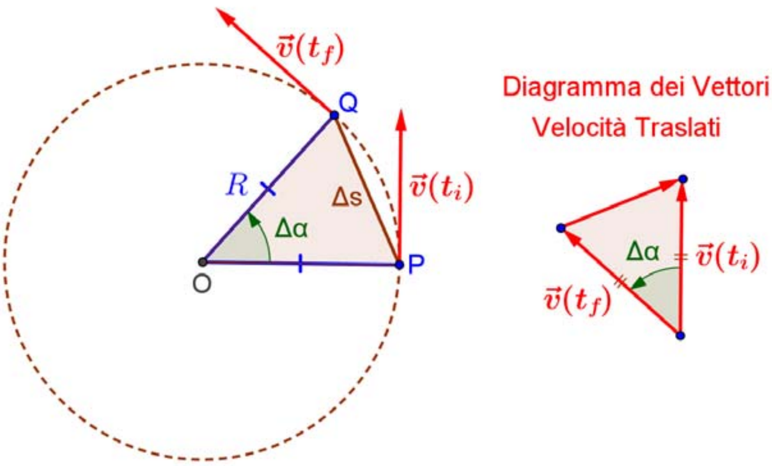
$$\text{I)}\quad a_C(t) = \frac{v(t)^2}{R}\ ;$$

$$\text{II)}\quad a_C(t) = \omega(t)^2 \cdot R\ .$$

e $\omega(t)$ in luogo di v e ω, che rappresentano rispettivamente i valori che la *Velocità Tangenziale* e la *Velocità Angolare* assumono all'*Istante t* quando il *Punto Materiale* si trova in un certo *Punto P della Traiettoria* (non più necessariamente *Circolare*). Il valore *R*, infine, in questo caso generale indica il *Raggio di Curvatura della Traiettoria nel punto P*.

Dimostrazione Thesi (I) / Caso MCU

La figura (a) mostra le *Velocità* $\vec{v}(t_i)$ e $\vec{v}(t_f)$ di un *Punto Materiale* nelle due posizioni *P* e *Q* occupate, rispettivamente, negli *Istanti* t_i e $t_f = t_i + \Delta t$. I due *Vettori Velocità* $\vec{v}(t_i)$ e $\vec{v}(t_f)$ differiscono solo in *Direzione*, mentre i loro *Moduli* sono gli stessi e li



indichiamo con *v*. La *Variazione di Velocità* $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)$; ricavata graficamente nel diagramma in figura (b).

Osservazione: Triangolo(OPQ) simile Triangolo$\left(\vec{v}(t_{\mathrm{i}}),\vec{v}(t_{\mathrm{f}}),\Delta\vec{v}\right)$ (figura (a))

In prima istanza si osservi che i due triangoli in oggetto sono *Triangoli Isosceli* per il semplice fatto che il Triangolo(OPQ), ha due lati che sono *Raggi* della stessa *Circonferenza*, mentre, il *Triangolo delle Velocità*, ha due lati costituiti dal *Vettore Velocità* in diversi istanti e quindi, essendo il *Moto Uniforme*, tali lati sono congruenti.

Si indichino con Δs e $\Delta\alpha$ rispettivamente la *Lunghezza della Base* e l'*Ampiezza dell'Angolo al Vertice* del *Triangolo Isoscele*(OPQ). Poiché i *Vettori Velocità* $\vec{v}(t_{\mathrm{i}})$ e $\vec{v}(t_{\mathrm{f}})$ sappiamo dalla teoria che sono *Tangenti alla Traiettoria*, per un noto teorema di *Geometria Euclidea* sono, rispettivamente, *Perpendicolari* ai raggi/lati OP e OQ e quindi formano un *Angolo* congruente a $\Delta\alpha$. Pertanto, parlando di una coppia di *Triangoli Isosceli*, se gli *Angoli al Vertice* sono congruenti, lo saranno per logica, anche le due coppie di *Angoli Adiacenti alla Base*. Avendo due *Triangoli Isosceli* con *Angoli* rispettivamente congruenti, si deduce che tali *Triangoli* sono *Triangoli Simili.*

In virtù della *Similitudine* appena dimostrata, considerando che il *Triangolo delle Velocità* ha base di *Lunghezza* Δv, vale la seguente proporzione:

$$\Delta v : v = \Delta s : R \quad \text{ovvero:} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{R}$$

Ricavando Δv da questa equazione otteniamo:

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{R}\cdot v = \Delta s\cdot\frac{v}{R} \Rightarrow [\text{dividendo membro a membro per } \Delta t\,] \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{v}{R} \Rightarrow$$

Adesso, riducendo sempre più l'intervallo di tempo di osservazione Δt sino a farlo diventare infinitesimo, cioè fino a che il punto P tendendo al punto Q, non faccia sì che il segmento PQ si confonda con l'*Arco di Circonferenza* $\widehat{PQ}$ (*Spazio* effettivamente percorso dal *Punto Materiale* lungo la *Traiettoria*). Allora il rapporto $\Delta s/\Delta t$ tende al modulo della *Velocità Istantanea* v. D'altro canto il rapporto $\Delta v/\Delta t$ tende all'*Accelerazione Istantanea*, (che, come già sappiamo, assume *Direzione Radiale Verso il Centro della Circonferenza*).

Riepilogando, quando Δt tende a zero, possiamo dunque sostituire:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \to a_{\mathrm{C}} \quad \text{(modulo dell'}\textit{Accelerazione Centripeta}\text{)}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to v \quad \text{(velocità scalare } v\text{)}$$

Per ottenere il seguente risultato:

$$a_{\mathrm{C}} = \frac{v^2}{R}.$$

Dimostrazione Thesi (II) / Caso MCU

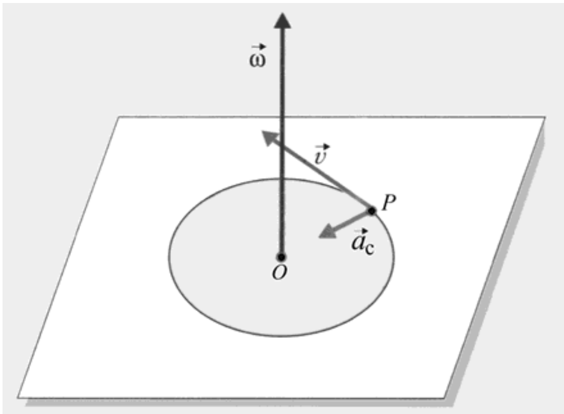
Per la **Tesi** (**I**):

$$a_{\mathrm{C}} = \frac{v^2}{R} = [\S 5.03(q)] = \frac{(\omega\cdot R)^2}{R} = \frac{\omega^2\cdot R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} = \omega^2\cdot R \qquad \text{[c.v.d.]}$$

5.03.t) Vettore Accelerazione Centripeta

L'*Accelerazione Centripeta* è una *Grandezza Vettoriale* così definita:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{mod}(\vec{a}_c):\ a_c = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \\ \mathrm{dir}(\vec{a}_c) \perp \mathrm{Piano}(\vec{\omega}\ ;\ \vec{v}) \\ \mathrm{vrs}(\vec{a}_c)\ :\ \text{Regola della Mano Destra applicata a: } \vec{\omega} \times \vec{v} \end{cases}$$



Come già detto: la *Direzione del Vettore* $\vec{\omega}$ è ortogonale al *Piano della Traiettoria* e il *Verso* individuato dalla *Regola della Mano Destra*. Come illustrato in figura, tenendo la mano destra con le dita piegate secondo il *Verso del Moto* (cioè secondo il *Vettore Velocità Tangenziale*) sulla *Traiettoria Circolare*, il pollice indica la direzione e il verso del *Vettore Velocità Angolare*.

La *Direzione del Vettore* $\vec{a}_c$ è ortogonale al *Piano Individuato dalla Velocità Angolare e dalla Velocità Tangenziale della Traiettoria* e il *Verso* individuato dalla *Regola della Mano Destra*. Come illustrato in figura, tenendo la mano destra con le dita piegate secondo il *Verso del Moto* (cioè secondo il *Vettore Velocità* tangenziale) sulla *Traiettoria Circolare*, il pollice indica la direzione e il verso del *Vettore Velocità Angolare*, l'indice indica la direzione e il verso del *Vettore Velocità Tangenziale* mentre il medio indica la direzione e il verso del *Vettore Accelerazione Centripeta*.