# 12.9 - Energia Potenziale in Campo Gravitazionale

## 12.09.a) Lavoro Compiuto dalla Forza Gravitazionale

Nel calcolare il *Lavoro della Forza Peso su un Corpo*, abbiamo sempre supposto che il *Corpo* in esame fosse abbastanza vicino alla *Terra* in modo da rendere trascurabili le variazioni dell'*Accelerazione di Gravità* e poterne quindi considerare costante il *Peso*.

Nel caso in cui un *Corpo di Massa m* non rimanga in prossimità della *Terra* durante il *Moto*,(come ad esempio nel volo delle navi spaziali), la *Forza di Attrazione Terrestre* non può più considerarsi costante ma, diminuisce con l'aumentare della *Distanza dal Centro della Terra*, secondo la legge:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Il nostro obiettivo è adesso quello di calcolare il *Lavoro Compiuto dalla Forza Peso* come *Forza* dipendente dalla *Distanza dal Centro della Terra.*

**Teorema 12.09(a) (Lavoro Compiuto dalla Forza Gravitazionale)**

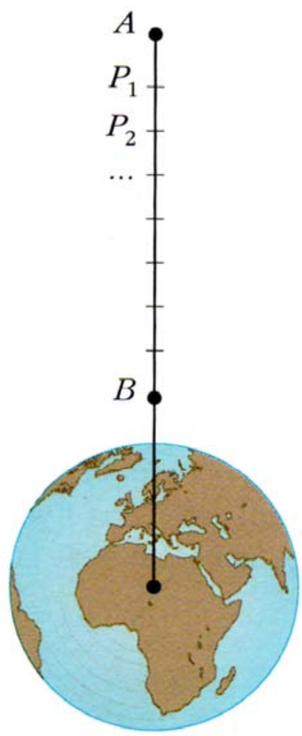
Dato un *Punto Materiale di Massa m* che cade *Verticalmente* dalla posizione *A* alla posizione *B*, a *Distanze* $r_A$ e $r_B$, rispettivamente, dal *Centro della Terra*, risulta che il *Lavoro della Forza Peso* in funzione della *Distanza r dal Centro* della *Terra* è data da:

$$L = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad \text{con: } r_A \geq R_T \text{ ed } r_B \geq R_T$$

dove :

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{Kg^2}}$$

$M_T$ : *Massa della Terra*; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg




Il Lavoro compiuto dalla Forza Gravitazionale per lo Spostamento di una Massa da $A$ a $B$ è la somma dei Lavori Compiuti durante tutti i vari Spostamenti Parziali da $A$ a $P_1$, da $P_1$ a $P_2$, ecc.

**Strategia Dimostrativa**

Si supponga di suddividere lo spostamento di *Misura* ($r_A - r_B$) in tanti *Sotto-Intervalli di Lunghezza Infinitesima*.

Calcoliamo adesso il *Lavoro Compiuto dalla Forza Gravitazionale* in ciascuno di questi intervalli. Alla fine ricaveremo il *Lavoro Totale* come sommatoria dei lavori parziali.

## Dimostrazione

### Osservazione Preliminare

Essendo gli *Spostamenti Parziali Infinitesimi*, su ciascuno di essi possiamo considerare *Costante* rispetto ad $r$ la *Forza Gravitazionale* che vale:

$$F_{\mathrm{G}} \equiv F_{\mathrm{G}}(r) = G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}} \cdot m}{r^2}$$

Il *Lavoro Compiuto* dalla *Forza Gravitazionale* durante il primo *Spostamento* che va da $r_{\mathrm{A}}$ a $r_1$ è dato da:

$$\delta L_{\mathbf{1}} = \vec{F}_{\mathrm{G}} \bullet \delta \vec{s}_1 = F_{\mathrm{G}} \cdot \delta s_1 = \left( G \cdot \frac{M_{\mathrm{T}} \cdot m}{r^2} \right) \cdot (r_{\mathrm{A}} - r_1) = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \frac{r_{\mathrm{A}} - r_1}{r^2} = (*)$$

in cui la quantità $r^2$ varia dal *Valore Massimo* $r_{\mathrm{A}}^2$ al *Valore Minimo* $r_1^2$.

Approssimando $r^2$ con la *Media Geometrica*: $r_{\mathrm{A}} \cdot r_1$ il *Lavoro* si esprime con la seguente relazione:

$$(*) = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \frac{r_{\mathrm{A}} - r_1}{r_{\mathrm{A}} \cdot r_1} = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{\cancel{r_{\mathrm{A}}}}{\cancel{r_{\mathrm{A}}} \cdot r_1} - \frac{\cancel{r_1}}{r_{\mathrm{A}} \cdot \cancel{r_1}} \right) = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}} \right)$$

Supponendo che *AB* venga suddiviso in *n parti infinitesime*, procedendo analogamente a quanto fatto per $\delta L_{\mathbf{1}}$ possiamo calcolare i restanti *Lavori Infinitesimi*, come segue:

$$\delta L_2 = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\delta L_{\mathbf{3}} = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\cdots$$

$$\delta L_k = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k-1}} \right)$$

$$\cdots$$

$$\delta L_{\mathrm{n}} = G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{n}-1}} \right)$$

per determinare il lavoro totale si devono sommare tutti i *contributi infinitesimi*:

$$L = \sum_i \delta L_i = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 + \ldots + \delta L_k + \ldots + \delta L_{\mathrm{n}} =$$

$$= G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}} \right) + G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) + \ldots + G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k-1}} \right) + \ldots =$$

$$= G \cdot M_{\mathrm{T}} \cdot m \cdot \left( \cancel{\frac{1}{r_1}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_3}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \ldots + \frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \cancel{\frac{1}{r_{\mathrm{n-1}}}} \right) \qquad \text{c.v.d}$$

*************************************************************************************************

## Appendice/Approfondimento : Media Geometrica e Media Geometrica Ponderata

La **Media Geometrica (Semplice)** è la *Radice n-esima* del *Prodotto* di tutti gli *N valori*.

In formule si può definire come segue: $\boxed{M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}$

Se $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k$ , sono i valori (tutti distinti ovvero senza ripetizione) di cui si desidera calcolare la *Media Geometrica* ed $f_1 , f_2 , \ldots , f_k$ le relative *Frequenze Assolute*, si ha che la **Media Geometrica Ponderata** è data dalla *Radice n-esima* del *Prodotto* di tutti i *k Valori Distinti* (Senza Ripetizione) *Elevati* ciascuno alla rispettiva *Frequenza Assoluta* $f_i$ (= Numero di Volte che il Valore $x_i$ si Ripete).

$$M_{g,pond} = \sqrt[n]{\prod_i \left(x_i^{f_i}\right)} \quad ; \quad \Sigma_i f_i = n$$

La *Media Geometrica* viene usata soprattutto quando i diversi valori vengono per loro natura moltiplicati tra di loro e non sommati.

**Esempio** : *Tassi di Crescita* (anche i *Tassi d'Interesse* o i *Tassi d'Inflazione*), adeguatamente modificati.

In questi casi è più corretto usare questo tipo di media al posto di quella aritmetica, perché ha caratteristiche utili in quelle situazioni.

### Caratteristiche e Limiti

Una caratteristica è che valori piccoli (rispetto alla *Media Aritmetica*) sono molto più importanti di valori grandi. In particolare, è sufficiente la presenza di un unico *Valore Nullo*, per rendere nulla la *Media*, sia quella semplice che quella ponderata.

### Esempi

Nei seguenti cinque anni sono stati rilevati i rispettivi *Tassi d'Inflazione*:

3,2% (1997); 2,7% (1998); 2,8% (1999); 2,2% (2000) e 3,2% (2001).

Calcolare la *Media Geometrica del Tasso d'Inflazione*.

# # #

Trattandosi di valori relativi e percentuali, li trasformiamo anzitutto dividendo con 100 e poi sommando loro 1. Otteniamo così per gli anni oggetto di studio, dei *Fattori Di Moltiplicazione* pari a:

1,032 ; 1,027 ; 1,028 ; 1,022 ; 1,032.

Moltiplicando tra di loro questi cinque valori otteniamo:

$$M_g = \prod_{i=1}^{5} x_1 = 1{,}149142$$

*****************************************************************************************

**I Osservazione**

L'espressione finale del lavoro dato da questa relazione è esatta nonostante che sia stata ottenuta con un metodo di *Calcolo Approssimato*.

**II Osservazione**

Per quanto visto nel [§ Def. 10.05.(a)] si può concludere che:

La *Forza Gravitazionale* è una *Forza Conservativa*.

Infatti, come nel *Caso di Forze Conservative*, anche in questo caso, il *Lavoro Compiuto dalle Forze Gravitazionali* è sempre lo stesso per una fissata coppia di *Punti A* e *B*, nel senso che non varia al variare della *Traiettoria che Unisce i Due Punti A e B*, ma dipende soltanto dalla loro *Distanza* $r_A$ e $r_B$ dal *Centro della Terra*.

## 12.09.b) Energia Potenziale Associata all'Interazione Gravitazionale

**Teorema 12.09(b) Energia Potenziale (Associata alla Forza Gravitazionale)**

Dato un *Punto Materiale di Massa m* che cade *Verticalmente* dalla posizione *A* alla posizione *B*, a *Distanze* $r_A$ e $r_B$, rispettivamente, dal *Centro della Terra*, risulta che l'*Energia Potenziale Gravitazionale della Massa m* in funzione della *Distanza r dal Centro* della *Terra* è data da:

$$\boxed{U(r) = -G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{r}} \quad \text{con: } r \geq R_T$$

dove :

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{Kg^2}}$$

$M_T$ : *Massa della Terra*;

$$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24} \ \mathrm{kg}$$

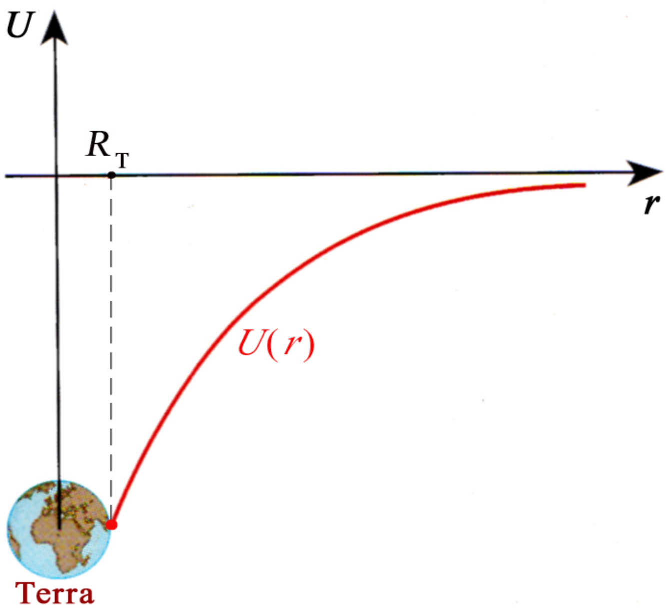



Grafico dell'Energia potenziale Gravitazionale in Funzione della Distanza dal Centro della Terra.

**Dimostrazione**

Ricordiamo ( cfr. [§ 10.05.(f)] ) che per ogni *Forza Conservativa*, il *Lavoro Compiuto dalla Forza* quando il suo *Punto di Applicazione* si sposta da *A* al *Punto B* indipendentemente dal cammino percorso, è:

$$L = U_A - U_B = -\Delta U$$

in cui $U_A$ e $U_B$ sono i *Valori dell'Energia Potenziale Gravitazionale nei Due Punti A e B* rispettivamente.

Dunque si ha che:

$$\left.\begin{array}{l} \text{per § 10.05(f)}: L = U_A - U_B = -U_B + U_A \\ \text{per § 3.09(a)}: L = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A}\right) = \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B} - \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{r_A} \end{array}\right\| \Rightarrow U_A = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_A} \wedge U_B = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B}$$

Pertanto l'*Energia Potenziale Gravitazionale della Massa m Calcolata in un Punto a Distanza r dal Centro della Terra*, *Maggiore o Uguale* al *Raggio Terrestre* $R_T$ vale:

$$U(r) = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{r}.$$

**I Osservazione sul Teorema 12.09(b)**

Il *Valore Negativo* dell'*Energia Potenziale Gravitazionale della Massa m* in funzione della *Distanza r dal Centro* della *Terra* è una conseguenza dell'aver scelto convenzionalmente l'*Infinito* come *Livello Zero*.

**II Osservazione sul Teorema 12.09(b)**

Il fatto fisico più importante è che, come si evidenzia dal grafico nella figura precedente, l'*Energia Potenziale Gravitazionale* aumenta con la *Distanza dal Centro della Terra*. È necessario perciò compiere un *Lavoro dall'Esterno* (*Lavoro Negativo*, perché *Forza* e *Spostamento* sono *Anti-Paralleli*) per allontanare una *Massa m* dalla *Superficie Terrestre*.

Inversamente, quando un corpo si avvicina alla *Terra*, la *Forza Gravitazionale* compie un *Lavoro Positivo* (perché *Forza* e *Spostamento* sono *Paralleli* e *Concordi*).

### 12.09.c) Osservazione(Energia Potenziale Associata al Sistema Isolato Terra-Particella)

La legge:

$$U(r) = -G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{1}{r}$$

che descrive l'*Energia Potenziale di una Particella di Massa m nel Campo Gravitazionale Terrestre*, in funzione della *Distanza r dal Centro* della *Terra* può essere interpretata anche come l'**Energia Potenziale Associata al Sistema Isolato Terra-Particella**.

### 12.09.d) Definizione (Energia Potenziale Associata ad una Coppia di Masse $m_1$ ed $m_2$)

L'*Energia Potenziale* Associata ad un *Sistema Isolato Costituito da una Coppia di Masse* $m_1$ ed $m_2$, separate da una *Distanza r*, è pari a:

$$U(r) = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}.$$

**Esercizio Consigliato : Esercizio n°Phys.I / CF.412.006**