12.10 - Conservazione dell'Energia nel Campo Gravitazionale

12.10.a) Teorema di Conservazione Dell' Energia in un Campo Gravitazionale

Se indichiamo con *m* la *Massa di un Corpo in Movimento*, con *Velocità* $\vec{v}$, nel *Campo Gravitazionale Terrestre*, e con *r* la sua *Distanza dalla Centro della Terra*, per il *Principio di Conservazione dell' Energia Meccanica* possiamo scrivere:

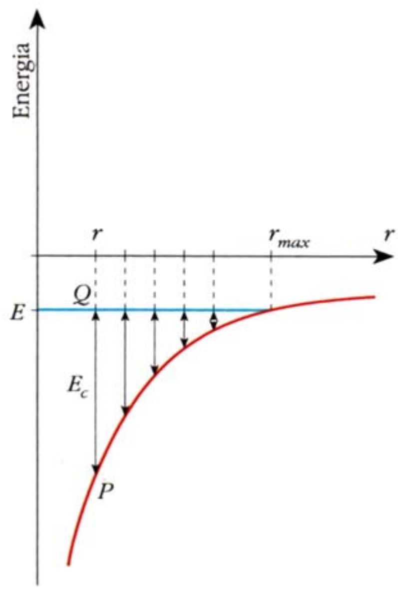
$$E_C(r)+U(r)=\text{costante} \quad \text{ovvero:} \quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2-G\cdot\frac{m\cdot M_T}{r}=\text{costante}$$

Osservazione

Per il precedente teorema possiamo dire che la somma dell' *Energia Cinetica* e dell' *Energia Potenziale del Corpo di Massa m* si mantiene *Costante* durante il *Moto*.

Osservazione (Massimo Allontanamento dalla Terra)

Un *Corpo Dotato di Energia Totale E* nel *Campo Gravitazionale Terrestre* può spostarsi in ogni punto dello *Spazio* in cui l'*Energia Potenziale Gravitazionale* (*U*) che varia da punto a punto, è minore o uguale al valore costante dell'*Energia Totale E,* come richiede il *Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica*.



Facendo riferimento alla figura, dove in *Ascisse* è riportata la *Distanza r dal Centro della Terra* e in ordinata l'*Energia*, esaminando il *Moto di un Corpo di Massa m* che ha *Energia Meccanica E Negativa* ed *Energia Cinetica* E_C alla *Distanza r dal Centro della Terra*.

L'*Energia Cinetica* $E_C(r)$ espressa per il *Principio di Conservazione dell'Energia Meccanica* dalla misura:

$$E_C(r)=E(r)-U(r)$$

è in figura rappresentata dal *Segmento PQ*.

L'osservazione appena riportata è confermata anche dal grafico: si può infatti osservare da esso che l'*Energia Potenziale* non può superare l'*Energia Totale*.

Algebricamente questo si dimostra come segue:

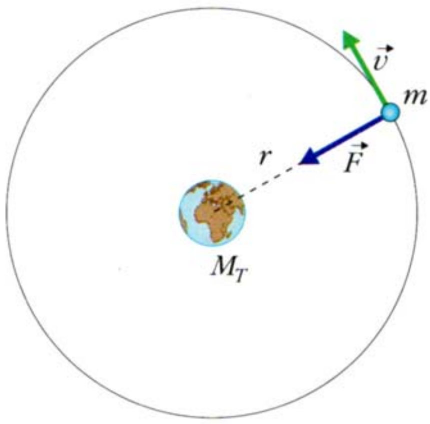
$$\text{Pr. di Cons. En. Meccanica: } U(r)+E_C(r)=E(r)\Leftrightarrow U(r)=E(r)-E_C(r)\le E(r)$$

Con l' aumentare della *Distanza r dal Centro della Terra*, l'*Energia Cinetica* si riduce con continuità fino ad annullarsi per *r* uguale ad r_{MAX}, dove il segmento *PQ* si riduce ad un *Punto*. La *Distanza* r_{MAX} rappresenta dunque la *Massima Distanza dalla Terra* alla quale può giungere il *Corpo* dotato di *Energia Meccanica E*. In conclusione se *E* è *Negativa*, il *Corpo* non può allontanarsi.

12.10.b) Energia Totale per le Orbite Chiuse

Dato un *Satellite in Orbita Circolare di Raggio* ***r*** *Intorno alla Terra*, risulta che l'*Energia Totale* vale:

$$E = -\,G \cdot \frac{m \cdot M_T}{2r}\,.$$



Il risultato fondamentale che a questo punto vogliamo evidenziare é che il *Satellite* ha *Energia Totale Negativa* come ci aspettiamo dal momento che esso, percorrendo la sua *Orbita*, rimane sempre a *Distanza Finita dalla Terra*. Più in generale vale che l'*Energia Totale* è *Negativa* per ogni *Orbita Chiusa* (*Circolare* o *Ellittica*). Invece un *Corpo* dotato di *Energia Totale Positiva* o *Nulla* si allontana indefinitamente dalla terra.

I Osservazione

Occorre tener presente che tutte le considerazioni fatte sul *Segno dell'Energia Meccanica E* sono valide esclusivamente nella *Convenzione* di attribuire *Valore Nullo all'Energia Potenziale Gravitazionale* e della *massa m* all'*Infinito*.

II Osservazione

Per concretezza si è fatto riferimento al *Campo Gravitazionale Terrestre*, ma i risultati visti si estendono al *Campo Gravitazionale* di ogni altro *Corpo Celeste* sostituendo alla *Massa* M_T *della Terra* la *Massa M* del *Corpo* considerato. Il precedente teorema in questo caso ha la seguente tesi:

$$E = -\,G \cdot \frac{m \cdot M}{2r}\,.$$

12.10.c) Esempio

Un'applicazione del teorema al punto (b) può essere quella di:

"Calcolare l'*Energia Meccanica di un Pianeta di Massa* (*m*) in *Orbita Circolare* attorno ad una *Stella di Massa* (*M*). La condizione che deve essere rispettata affinché ad un *Sistema di Due Masse* si possono applicare le tre equazioni viste in questo paragrafo è che la *Massa M del Corpo che Genera il Campo* sia molto maggiore della *Massa m in Movimento nel Campo*. In questo caso ,allora, la *Massa Più Grande M* può essere ritenuta *Immobile nella Posizione che Occupa in un Sistema di Riferimento Inerziale* (dove valgono le prime due *Leggi di Newton*), e la sua *Energia Cinetica* può essere pertanto trascurata. In caso contrario, nello scrivere l'*Energia Totale del Sistema*, dovremmo includere anche l'*Energia Cinetica* della *Massa M*.

Nel *Caso Della Terra* la condizione: $M >> m$ è certamente verificata se *m* è la *Massa di un Satellite Artificiale*. Relativamente al *Sistema Terra-Luna*, le due *Masse* differiscono per due soli ordini di grandezza la condizione è verificata più debolmente. Tuttavia, anche in questo caso; l'approssimazione di considerare ferma la *Terra* è accettabile e comporta dunque un errore trascurabile.

Esercizio Consigliato : Esercizio n°Phys.I / CF.416.007