14.2 - Concetto di Derivata

14.02.a) Definizione Di Derivata

Data una *Funzione f* si dice :

Funzione f Derivabile nel Punto x_0

se esiste ed è *finito* il seguente *Limite* :

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{bmatrix} \text{Poniamo:} \\ h := x - x_0 \end{bmatrix} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ; \quad h \neq 0$$

Il valore del *Limite del Rapporto Incrementale* si chiama :

Derivata della Funzione f Calcolata nel *Punto* x_0

Notazione: $$f'(x_0) \equiv D[f(x)]_{x = x_0} \equiv \frac{d f}{d x}(x_0)$$

14.02.b) Condizioni per la Derivabilità nel Punto x_0

Affinché una *Funzione* sia *Derivabile* nel *Punto* x_0 occorre che si verifichino le seguenti tre *Condizioni* :

1. La *Funzione* sia definita in un *Intorno* x_0.
   (in quanto x_0 per definizione di *Limite* deve essere un *Punto di Accumulazione per* Dom *f*).
2. Per *h Tendente a Zero* (tanto da dx quanto da sx) esista il *Limite del Rapporto Incrementale*.
3. Il *Limite del Rapporto Incrementale* sia *Finito*.

14.02.c) Significato Geometrico di Derivata

Riferendosi alla figura dei paragrafi precedenti, fissato P_0 consideriamo la *Retta Secante* Graph f nei *Punti P e* P_0 al *Tendere di h a Zero*, il *Punto P*, “si muove” sulla *Curva* avvicinandosi a P_0.

Se f è *Derivabile in* x_0, esiste ed è finito il:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\ (x_0+h)-f(x_0)}{h}=f\,'(x_0)$$

Quindi il *Coefficiente Angolare della Retta* $r(P_0;P)$ tende a quello della *Retta t* tangente al Graph f nel *Punto* P_0 avente equazione:

$$t:\ y=f(x_0)+f\,'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Pertanto, la *Derivata* $f\,'(x_0)$ della *Funzione f nel Punto* x_0 non è altro che il *Coefficiente Angolare al* Graph f nel *Punto* $P_0(\ x_0\ ;\ f(x_0)\ )$.

Dunque, dire che una *Funzione f è Derivabile nel Punto* x_0 dal *Punto di Vista Geometrico* significa dire che *Esiste* ed è *Unica la Retta Tangente al* Graph f nel *Punto* $P_0(\ x_0\ ;\ f(x_0)\ )$ e che, essendo $f\,'(x_0)$ un numero, tale *Retta Non è Parallela all’Asse y*.

14.3 - Derivata Destra e Derivata Sinistra

14.03.a) Definizione di Derivata Destra

Data una *Funzione* f definiamo :

Derivata Destra della Funzione f **Calcolata nel** *Punto* x_0

il *Limite Destro del Rapporto Incrementale* , ovvero:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ; \quad h \neq 0 .$$

14.03.b) Significato Geometrico di Derivata Destra

Dire che la *Funzione* f è *Derivabile a Destra in* x_0 geometricamente significa che il Graph f è dotato nel *Punto* $P_0(x_0; f(x_0))$ di *Semiretta Tangente Destra* avente equazione :

$$t^+ : y = f(x_0) + f'_+(x_0) \cdot (x - x_0)$$

14.03.c) Definizione di Derivata Sinistra

Data una *Funzione* f definiamo :

Derivata Sinistra della Funzione f **Calcolata nel** *Punto* x_0

il *Limite Sinistro del Rapporto Incrementale* , ovvero:

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ; \quad h \neq 0 .$$

14.03.d) Significato Geometrico di Derivata Sinistra

Dire che la *Funzione* f è *Derivabile a Sinistra in* x_0 geometricamente significa che il Graph f è dotato nel *Punto* $P_0(x_0; f(x_0))$ di *Semiretta Tangente Sinistra* avente equazione :

$$t^- : y = f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot (x - x_0)$$