STUDIO DI FUNZIONI / Funzioni Algebriche Irrazionali Intere a Indice Dispari

ESERCIZIO N°MATH.III/"CORSOBASEBLU.MATEMATICA" - B.T.B.V248.091

("FUNZIONI ALGEBRICHE IRRAZIONALI INTERE / INDICE DISPARI E RADICANDO III GRADO")

Studiare la seguente *Funzione*:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 - x)}$$

Scansione Operativa per un approfondito **Studio di Funzioni**.

1) **Classificazione della Funzione.**
2) **Dominio della Funzione e sua Limitatezza.**
3) **Definizione Formale della Funzione.**
4) **Periodicità della Funzione.**
5) **Ricerca delle Simmetrie della Funzione.**
6) **Intersezione con gli Assi Cartesiani.**
7) **Studio del Segno della Funzione.**
8) **Esplorazione Estremi del Dominio**
   (Ricerca degli Asintoti Orizzontali, Verticali ed Obliqui)
9) **Studio della Derivata Prima (Monotonia, Massimi/minimi Relativi/Assoluti).**
10) **Studio della Derivata Seconda (Concavità/Convessità, Punti di Flesso).**
11) **Determinazione dell'Insieme di Continuità della Funzione**
12) **Grafico della Funzione.**

Svolgimento

1) Classificazione della Funzione.

f Funzione Numerica Matematica Algebrica Irrazionale (Indice Dispari) Intera.

2) Dominio della Funzione e sua Limitatezza

Per le *Funzioni Algebriche Irrazionali a Indice Dispari* non è previsto alcun tipo di *Condizione di Esistenza* e pertanto risulta che:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} = \left]-\infty; +\infty\right[$$

Essendo ovviamente $\mathbb{R} = \left]-\infty; +\infty\right[$ un insieme *Illimitato*, anche $\text{Dom } f$ sarà un insieme *Illimitato*.

3) Definizione Formale della Funzione

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \sqrt[3]{x^2 \cdot (1 - x)}$$

4) Ricerca delle Simmetrie della Funzione

La *Funzione* assegnata non è né *Pari* e né *Dispari*.

Dimostrazione Standard

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2\cdot(1-(-x))}=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}\neq\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}=f(x)\Rightarrow\neg\left(f\ \text{Funzione Pari}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\ \text{Non Simmetrica Rispetto Asse } y$$

$$-f(-x)=-\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}\neq+\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}=f(x)\Rightarrow\neg\left(f\ \text{Funzione Dispari}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\ \text{Non Simmetrica Rispetto Origine } O$$

5) Intersezione con gli Assi Cartesiani

$$\text{Graph } f\cap(Asse\,x):\begin{cases}y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}=0\\ y=0\end{cases}\underset{\substack{\text{Proprietà dei Radicali}\\ \sqrt[3]{g(x)}=0\Leftrightarrow g(x)=0}}{\Rightarrow}\begin{cases}x^2\cdot(1-x)=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{Legge di Annullamento del Prodotto}\\ A\cdot B=0\Rightarrow A=0\vee B=0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\left(x^2=0\right)\vee\left(1-x=0\right)\\ y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}1-x=0\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}-x=-1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=+1\\ y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\text{Graph } f\cap(Asse\,x)=\left\{(0;0)\,;\,(+1;0)\right\}$$

L'unica possibile intersezione con l'*Asse y* è inutile calcolarla perché l'abbiamo appena trovata! Si è appena scoperto, infatti, che il grafico passa per l'*Origine* e tale punto è ovviamente oltre che una delle intersezioni con l'asse delle *Ascisse* anche l'unica possibile intersezione con quello delle *Ordinate*.

In alternativa, formalizzando a dovere si può scrivere che:

$$\text{Graph } f\cap(Asse\,x)=\left\{(0;0)\,;\,(+1;0)\right\}\Rightarrow\text{Graph } f\cap(Asse\,y)=\left\{(0;0)\right\}.$$

6) Periodicità della Funzione

f *Funzione Non Periodica*.

Dimostrazione

Supponendo per assurdo che f *Funzione Periodica di Periodo* $T\in\mathbb{R}$, se si trovasse anche una sola intersezione con l'*Asse x*, questa dovrebbe "ripetersi" infinite volte (come ad es. accade per la *Funzione* sin *x*). e quindi tali intersezioni dovrebbero essere infinite. Come si evince dal Punto (6) però, f ha solo due intersezioni con l'*Asse Orizzontale* e quindi f non può essere una *Funzione Periodica*.

7) Studio del Segno della Funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 \cdot (1-x)} > 0 \quad (Disequazione\ Algebrica\ \ Irrazionale\ Dispari\ Intera)$$

Osservazione

Il primo passaggio di questa semplice disequazione richiede una semplice riflessione. La *Radice Cubica* (o più in generale *Radice Dispari*) di un qualunque numero conserva il segno del *Radicando*. Si pensi ai seguenti semplici esempi numerici:

$$\sqrt[3]{+27} = \sqrt[3]{+3^3} = +3 > 0 \quad ; \quad \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-3^3} = -3 < 0$$

In modo del tutto analogo, se al posto di numeri prendiamo come *Radicando* una qualunque *Funzione g*(x) vale che:

$$\sqrt[3]{g(x)} > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \quad \wedge \quad \sqrt[3]{g(x)} < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0$$

Nel nostro caso pertanto si può concludere che:

$$f(x) > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 \cdot (1-x)} > 0 \Rightarrow x^2 \cdot (1-x) > 0 \Leftrightarrow$$

Si tratta di una *Disequazione Fattoriale*. Si dovrebbe procedere, pertanto, con la determinazione del segno di ogni singolo fattore. Un risolutore attento però, non si lascia sfuggire che il *Primo Fattore*, essendo un quadrato, è sempre *Positivo* o *Nullo* e quindi tutto il prodotto è *Positivo* se e solo se il primo fattore è *Non Nullo* e il secondo è strettamente *Positivo*, cioè:

$$x^2 \cdot (1-x) > 0 \Leftrightarrow (x \neq 0) \ \wedge \ (1 - x > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \neq 0) \ \wedge \ (-x > -1) \Rightarrow (x \neq 0) \ \wedge \ (x < +1) \Rightarrow \ x < 0 \ \wedge \ 0 < x < +1$$

Pertanto in conclusione: $f(x) \begin{cases} > 0 \ \text{ per } x \in \left]-\infty\,; 0\right[\cup \left]0; +1\right[\\ = 0 \ \text{ per } x \in \{0; +1\} \\ < 0 \ \text{ per } x \in \left]+1; +\infty\right[\end{cases}$

8) Esplorazione Estremi del Dominio / (Ricerca di Asintoti Orizzontali, Verticali ed Obliqui)

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} = \left]-\infty; +\infty\right[$$

Ricerca di Asintoti Orizzontali / Obliqui

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2 \cdot (1-x)}\right) = [\text{P.A.L.}] =$$

$$= \sqrt[3]{(-\infty)^2 \cdot (1-(-\infty)} = \sqrt[3]{(+\infty)\cdot(1+\infty)} = \sqrt[3]{(+\infty)\cdot(+\infty)} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty\,.$$

(Possibile *Asintoto Obliquo*!)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = \left[\begin{array}{l} \text{per } x\to\infty: \\ \sqrt[3]{x^2 - x^3} \sim \sqrt[3]{-x^3} \end{array}\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{{}^{1}-\cancel{x}}{{}^{1}\cancel{x}} = -1 =: m_S$$

Pertanto, per x che tende a -∞ la f ammette un *Asintoto Obliquo* di *Coefficiente Angolare*: $m_S = -1$

Osservazione

Il *Coefficiente Angolare dell'Asintoto Obliquo Sinistro* coincide con quello della *Bisettrice* II/IV e quindi risulterà parallelo ad essa. Accertata l'esistenza di tale *Retta*, si procede con il calcolo della sua *Intercetta*:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m_S\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}-(-1)\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right]=[\text{F.I. } +\infty-\infty]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{"Tattica di Gioco"/N.B.:aiutarsi con i colori!}\\ \text{Eliminare la } \textit{Radice Cubica} \text{ ricreando}\\ \text{la } \textit{Scomposizione della Somma di Cubi}\\ (A+B)\cdot(A^2-A\cdot B+B^2)=A^3+B^3\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{In particolare, si procederà come segue:}\\ A+B=(A+B)\cdot\dfrac{(A^2-A\cdot B+B^2)}{(A^2-A\cdot B+B^2)}=\dfrac{(A+B)\cdot(A^2-A\cdot B+B^2)}{(A^2-A\cdot B+B^2)}=\dfrac{A^3+B^3}{(A^2-A\cdot B+B^2)}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right]\cdot\left[\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)^2+\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2\right]}{\left[\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)^2-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)^3+x^3}{\left[\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\cancel{\sqrt[3]{}}\,x^2-x^3\right)^{\cancel{3}}+x^3}{\left[\sqrt[3]{x^4-2x^5+x^6}-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{+x^2\cancel{-x^3}\cancel{+x^3}}{\left[\sqrt[3]{x^4-2x^5+x^6}-\sqrt[3]{x^2-x^3}\cdot x+x^2\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{+x^2}{\left[\sqrt[3]{x^6\cdot\left(\frac{x^4}{x^6}-\frac{2x^5}{x^6}+\frac{x^6}{x^6}\right)}-\sqrt[3]{x^3\cdot\left(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}\right)}\cdot x+x^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{+x^2}{\left[x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^6}-\frac{2x^5}{x^6}+\frac{x^6}{x^6}}-x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}\cdot x+x^2\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{+x^2}{\left[x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}-x^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+x^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{1}{\cancel{x^2}}}{x^2\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{1}{\cancel{x^2}}}{\overset{1}{\cancel{x^2}}\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1\right]}=[\text{P.A.L.}]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{\cancel{\frac{1}{(-\infty)^2}}-\cancel{\frac{2}{(-\infty)}}+1}-\sqrt[3]{\cancel{\frac{1}{(-\infty)}}-1}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{+1}-\sqrt[3]{-1}+1}=\frac{1}{+1+1+1}=+\frac{1}{3}=:q_S$$

Pertanto per x che tende a -∞ la funzione f ammette un *Asintoto Obliquo* di equazione:

$$a_{OB,S}:\ y=m_S\cdot x+q_S\Leftrightarrow a_{OB,S}:\ y=-x+\frac{1}{3}.$$

In modo del tutto analogo si calcola che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}\right) = [\text{P.A.L.}] =$$

$$= \sqrt[3]{(+\infty)^2\cdot(1-(+\infty))} = \sqrt[3]{(+\infty)\cdot(1-\infty)} = \sqrt[3]{(+\infty)\cdot(-\infty)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty .$$

(Possibile *Asintoto Obliquo*!)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}}{x} = \left[\begin{array}{c}\text{Calcolo analogo al}\\ \text{Caso: } x\to-\infty\end{array}\right] = -1 =: m_D$$

Pertanto, per x che tende a $+\infty$ la f ammette un *Asintoto Obliquo* di *Coefficiente Angolare*: $m_D = -1$

Accertata l'esistenza di tale *Retta*, si procede con il calcolo della sua *Intercetta*:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-m_D\cdot x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}-(-1)\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right] = [\text{F.I. } +\infty-\infty] =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{Calcolo analogo al}\\ \text{Caso: } x\to-\infty\end{array}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}+1} = [\text{P.A.L.}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\cancel{\frac{1}{(+\infty)^2}}-\cancel{\frac{2}{(+\infty)}}+1}-\sqrt[3]{\cancel{\frac{1}{(+\infty)}}-1}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{+1}-\sqrt[3]{-1}+1} = \frac{1}{+1+1+1} = +\frac{1}{3} =: q_D$$

Pertanto per x che tende a $+\infty$ la funzione f ammette un *Asintoto Obliquo* di equazione:

$$a_{OB,D}:\ y = m_D\cdot x + q_D \Leftrightarrow a_{OB,D}:\ y = -x+\frac{1}{3}.$$

Potremmo approfondire lo studio del *Grafico della Funzione* indagando su un eventuale "taglio" dell'*Asintoto Obliquo* da parte del $\text{Graph } f$. Lo strumento di calcolo utile a tale scopo è come già visto anche per le *Intersezioni del* $\text{Graph } f$ *con gli Assi Cartesiani*, quello del *Sistema di Equazioni*.

$$\text{Graph } f \cap a_{OB}:\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}\\ y=-x+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{Metodo del}\\ \text{Confronto}\end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} -x+\frac{1}{3}=\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}\\ y=-x+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{3}-x=\sqrt[3]{x^2-x^3}\\ y=-x+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(+\frac{1}{3}-x\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x^2-x^3}\right)^3\\ y=-x+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{P.N.: Cubo del Binomio}\\ (A-B)^3 = A^3-3\cdot A^2\cdot B+3\cdot A\cdot B^2-B^3\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(+\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)^2\cdot x + \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\cdot x^2 \cancel{-x^3} = +x^2\cancel{-x^3}\\ y=-x+\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{27}-\cancel{3}\cdot\frac{1}{{}_{3}\cancel{9}}\cdot x\cancel{+x^2}=\cancel{+x^2} \\ y=-x+\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{27}-\frac{1}{3}\cdot x=0 \\ y=-x+\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-}\frac{1}{3}\cdot x=\cancel{-}\frac{1}{27} \\ y=-x+\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=+\frac{3}{27}=+\frac{1}{9} \\ y=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{-1+3}{9}=+\frac{2}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{Graph } f \cap a_{OB}=\left\{A\left(+\frac{1}{9};+\frac{2}{9}\right)\right\}\approx\{A(+0,11;+0,22)\}$$

Pertanto, il Graph f *Interseca* l'*Asintoto Obliquo* in un punto A.

Ricerca di Asintoti Verticali

$$\text{Dom } f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$$

Non essendoci punti in cui la *Funzione f* non è definita, si esclude a priori la presenza di *Asintoti Verticali*.

9) **Studio della Derivata Prima (Monotonia, Massimi/minimi Relativi/Assoluti).**

Come primo passo si procede con il calcolo della *Derivata Prima* mediante le *Derivate Notevoli* e le *Regole di Derivazione*:

$$f'(x)=D\left[\sqrt[3]{x^2\cdot(1-x)}\right]=D\left[\sqrt[3]{x^2-x^3}\right]=D\left[\left(x^2-x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]=\left[\begin{array}{c}\text{Regola di Derivazione delle}\\ \text{Funzioni Composte a 2 Livelli:}\\ \text{Livello 1: Potenza}\\ \text{Livello 2: Argomento della Potenza}\end{array}\right]=$$

$$=+\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-x^3\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(2\cdot x^{2-1}-3\cdot x^{3-1}\right)=+\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(2\cdot x-3\cdot x^2\right)=$$

$$=+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2-x^3\right)^2}}\cdot\left(2\cdot x-3\cdot x^2\right)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2-x^3\right)^2}}\cdot\left(-3\cdot x^2+2x\right)=\frac{-3\cdot x^2+2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(-x^3+x^2\right)^2}}.$$

Pertanto: $$f'(x)=\frac{-3\cdot x^2+2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(-x^3+x^2\right)^2}}$$

il cui *Dominio* è: $$\text{Dom } f': 3\cdot\sqrt[3]{\left(-x^3+x^2\right)^2}\underset{\substack{\text{Proprietà dei Radicali}\\ \sqrt[3]{g(x)}\neq 0\Leftrightarrow g(x)\neq 0}}{\Rightarrow}\left(-x^3+x^2\right)^2\neq 0\Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\text{Proprietà delle Potenze}\\ (g(x))^2\neq 0\Leftrightarrow g(x)\neq 0}}{\Rightarrow}-x^3+x^2\neq 0\Rightarrow x^2\cdot(1-x)\neq 0\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Legge di Annullamento del Prodotto}\\ A\cdot B\neq 0\Rightarrow A\neq 0\vee B\neq 0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2\neq 0\right)\vee\left(1-x\neq 0\right)\Rightarrow\left(x\neq 0\right)\vee\left(x\neq +1\right)\Rightarrow\text{Dom } f'=\mathbb{R}-\{0;+1\}\neq\text{Dom } f$$

Si procede con lo studio del segno della *Derivata Prima* e quindi della monotonia della funzione e l'individuazione dei *Punti Stazionari*.

$$f'(x)=\frac{-3\cdot x^2+2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(-x^3+x^2\right)^2}}>0\Rightarrow\left[3\cdot\sqrt[3]{\left(-x^3+x^2\right)^2}>0\quad\forall x\in\text{Dom } f'\right]\Rightarrow-3\cdot x^2+2x>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow+3\cdot x^2-2x<0\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Soluzioni Equazione Associata}\\ \text{Equazione di II Grado Incompleta Spuria}\\ 3\cdot x^2-2x=0\ \Rightarrow x\cdot(3x-2)=0\Rightarrow\\ \text{Legge Annull. Prodotto}\ \Rightarrow\ (x=0)\vee(x=2/3)\end{array}\right]\Rightarrow 0<x<+\frac{2}{3}$$

Per quanto studiato in teoria risulta dunque che:

$$\text{Pertanto in conclusione:}\quad f(x)\begin{cases}\text{Strettamente Crescente}\ \text{ per } x\in\left]0\ ;+\frac{2}{3}\right[\\ =0\ \text{ ammette Punti Stazionari per }\ x\in\{0\ ;+1\}\\ \text{Strettamente Derescente}\ \text{ per } x\in\left]-\infty;\,0\right[\cup\left]+\frac{2}{3};+\infty\right[\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{per}\ \ x=0\quad:\quad f\ \text{ ammette minimo Relativo}\\ \text{per } x=+\frac{2}{3}\ :\quad f\ \text{ ammette MASSIMO Relativo}\end{cases}$$

Calcolo dei *Punti Stazionari*:

$$f(0)=\sqrt[3]{\cancel{(0)^2\cdot(1-(0))}}=\sqrt[3]{0}=0$$

$$f\left(+\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\left(+\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(1-\left(+\frac{2}{3}\right)\right)}=\sqrt[3]{+\frac{4}{9}\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)}=\sqrt[3]{\frac{4}{27}}=+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Pertanto:

$$\begin{cases}\text{minimo Relativo}\qquad \mathrm{m}\equiv\left(0\ ;\ f(0)\right)\equiv(0\ ;\ 0)\equiv O\\ \text{MASSIMO Relativo}\ \ \mathrm{M}\equiv\left(+\frac{2}{3}\ ;\ f\left(+\frac{2}{3}\right)\right)\equiv\left(+\frac{2}{3}\ ;\ +\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)\equiv(+0,67;+0,53)\end{cases}$$

Ricerca dei Punti Estremanti della Funzione

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f \text{ Non Limitata Superiormente } \Rightarrow f \text{ Non Ammette MASSIMO Assoluto}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow f \text{ Non Limitata Inferiormente } \Rightarrow f \text{ Non Ammette minimo Assoluto}$$

I dati raccolti, sono sufficienti per tracciare un grafico molto vicino a quello reale. Lo studio della *Derivata Seconda* è pertanto da considerarsi superfluo ai fini di una rappresentazione grafica della funzione, non perfetta, ma cominque di buon livello! Tale studio (piuttosto laborioso dal punto di vista algebrico), viene comunque eseguito nel prossimo punto.