ESERCIZIO N°MATH.I / "CORSO MATEMATICA VERDE (LICEI NS)" - B.T.B. PG.586.116 ("SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI DETERMINATI / METODO DI CRAMER")

Risolvere con il *Metodo di Cramer* il seguente sistema di equazioni lineari, dopo aver stabilito se esso è *determinato, indeterminato* o *impossibile*.

$$\begin{cases} +\frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=+5 \\ +2x-\frac{5}{6}y+3=+8 \end{cases}$$

Si richiede la verifica geometrica del risultato ottenuto.

Svolgimento

Il primo passo da compiere è come al solito portare il sistema assegnato in *Forma Standard*.

$$\begin{cases} +\frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=+5 \\ +2x-\frac{5}{6}y+3=+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y=+5 \\ +2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y=+8-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y=+5 \\ +2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y=+5 \end{cases}$$

Prima di affrontare lo studio algebrico del sistema, è necessario stabilire se esso è *determinato*, *indeterminato* o *impossibile*.

A tal fine si utilizzerà il seguente teorema:

Teorema

Dato un generico *Sistema Lineare* in forma standard: $\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$

risulta che:

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Determinato	Le due Rette Associate al Sistema sono Incidenti e quindi si Intersecano in un Unico Punto
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Impossibile	Le due Rette Associate al Sistema sono Parallele e quindi Non si Intersecano Mai
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	$\Rightarrow$ Sistema Indeterminato	Le due Rette Associate al Sistema sono Coincidenti e quindi si Intersecano in Infiniti Punti

$$\Rightarrow \begin{cases} +\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y=+5 \\ +2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y=+5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{a_2}=\frac{+\frac{1}{5}}{+2}=+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=+\frac{1}{10} \\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{+\frac{2}{3}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{2}{{}_1\cancel{3}}\cdot\frac{{}^2\cancel{6}}{5}=+\frac{4}{5} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow \text{Sistema Determinato} \left[\begin{array}{c}\text{Le due Rette Associate al Sistema} \\ \text{sono Incidenti e quindi si Intersecano} \\ \text{in un Unico Punto } (r \not\parallel s) \end{array}\right]$$

Metodo di Cramer

Dato il *Sistema in Forma Standard*: $\begin{cases} a_1\cdot x+b_1\cdot y=c_1 \\ a_2\cdot x+b_2\cdot y=c_2 \end{cases}$

Si scrive il **Determinante del Sistema**:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2\neq 0$$

N.B.: se D è nullo, il sistema NON è un *Sistema Determinato* ovvero è o un *Sistema Impossibile* o un *Sistema Indeterminato*!

Si costruisce, a partire dal *Determinante del Sistema* un nuovo determinante ottenuto sostituendo, nella prima colonna, ai coefficienti della variabile *x*, i termini noti del sistema:

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1\cdot b_2-b_1\cdot c_2;$$

Si costruisce, a partire dal *Determinante del Sistema* un nuovo determinante ottenuto sostituendo, nella prima colonna, ai coefficienti della variabile *y*, i termini noti del sistema:

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot c_2-c_1\cdot a_2.$$

La soluzione del sistema, ovvero le *Coordinate del Punto di Intersezione delle Rette Associate al Sistema*, sono date da:

$$S=\text{Graph}(r)\cap\text{Graph}(s)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right) \qquad \text{con } D\neq 0$$

Soluzione del Sistema (Metodo di Cramer)

Dato il *Sistema in Forma Standard*:
$$\begin{cases} +\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y=+5 \\ +2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y=+5 \end{cases}$$

Si scrive il *Determinante del Sistema*:

$$D=\begin{vmatrix} +\frac{1}{5} & +\frac{2}{3} \\ +2 & -\frac{5}{6} \end{vmatrix}=\left(+\frac{1}{\cancel{5}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{5}}{6}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(+2)=-\frac{1}{6}-\frac{4}{3}=\frac{-1-8}{6}=-\frac{{}^{3}\cancel{9}}{{}_{2}\cancel{6}}=-\frac{3}{2}\neq 0$$

Osservazione: *D non* è *nullo* e ciò conferma che si tratta di un *Sistema Determinato*!

$$D_x=\begin{vmatrix} +5 & +\frac{2}{3} \\ +5 & -\frac{5}{6} \end{vmatrix}=(+5)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(+5)=-\frac{25}{6}-\frac{10}{3}=\frac{-25-20}{6}=-\frac{{}^{15}\cancel{45}}{{}_{2}\cancel{6}}=-\frac{15}{2}$$

$$D_y=\begin{vmatrix} +\frac{1}{5} & +5 \\ +2 & +5 \end{vmatrix}=\left(+\frac{1}{\cancel{5}}\right)\cdot(+\cancel{5})-(+5)\cdot(+2)=+1-10=-9$$

La soluzione del sistema, ovvero le *Coordinate del Punto di Intersezione delle Rette Associate al Sistema*, sono date da:

$$S=\mathrm{Graph}(r)\cap\mathrm{Graph}(s)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\cancel{-}\frac{15}{2}}{\cancel{-}\frac{3}{2}};\frac{\cancel{-}\frac{9}{1}}{\cancel{-}\frac{3}{2}}\right)\equiv\left(\frac{{}^{5}\cancel{15}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}};\frac{{}^{3}\cancel{9}}{1}\cdot\frac{2}{{}_{1}\cancel{3}}\right)\equiv(+5;+6)$$

$$\Rightarrow S=\mathrm{Graph}(r)\cap\mathrm{Graph}(s)=\{(+5;+6)\}$$

Rappresentazione Geometrica e Verifica della Soluzione del Sistema

Alle *Equazioni Lineari* di partenza sono associabili due rette del *Piano Cartesiano*, si procede con la loro rappresentazione.

$$\boxed{r:+\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y-5=0} \quad [\ \textit{Retta } r \text{ in } \textit{Forma Implicita}\ ]$$

$$\boxed{s:+2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y-5=0} \quad [\ \textit{Retta } s \text{ in } \textit{Forma Implicita}\ ]$$

Si prosegue trasformando le *Rette* in *Forma Esplicita* e successivamente determinando i loro *Punti di Intersezione* con gli *Assi Cartesiani*.

Retta *r*

$$r:+\frac{1}{5}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot y-5=0 \Rightarrow r:+\frac{2}{3}\cdot y=-\frac{1}{5}\cdot x+5 \underset{/+\frac{2}{3}}{\Rightarrow} r:\frac{\cancel{+\frac{2}{3}}\cdot y}{\cancel{+\frac{2}{3}}}=\frac{-\frac{1}{5}\cdot x}{+\frac{2}{3}}+\frac{+\frac{5}{1}}{+\frac{2}{3}} \Rightarrow y=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}x+5\cdot\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r:\ y=-\frac{3}{10}x+\frac{15}{2}} \quad [\ \textit{Retta } r \text{ in } \textit{Forma Esplicita}\ ]$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta r* con l'*Asse x*:

$$\text{Graph}(r)\cap(Asse.x):\begin{cases} y=-\frac{3}{10}x+\frac{15}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{10}x+\frac{15}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-}\frac{3}{10}x=\cancel{-}\frac{15}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{{}^{1}\cancel{10}}{{}^{1}\cancel{3}}\cdot\frac{{}^{1}\cancel{3}}{{}^{1}\cancel{10}}\cdot x=+\frac{{}^{5}\cancel{15}}{{}^{1}\cancel{2}}\cdot\frac{{}^{5}\cancel{10}}{{}^{1}\cancel{3}} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+25 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Graph}(r)\cap(Asse.x)=\{(+25\,;0)\}.$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta r* con l'*Asse y*:

$$\text{Graph}(r)\cap(Asse.y)=\{(0\,;q)\}=\left\{\left(0\,;+\frac{15}{2}\right)\right\}.$$

Retta *s*

$$s:+2\cdot x-\frac{5}{6}\cdot y-5=0\Rightarrow s:-\frac{5}{6}\cdot y=-2\cdot x+5\Rightarrow +\frac{5}{6}\cdot y=+2\cdot x-5\Rightarrow$$

$$\underset{/+\frac{5}{6}}{\Rightarrow} r:\frac{+\frac{\cancel{2}}{3}\cdot y}{+\frac{\cancel{5}}{6}}=\frac{+2\cdot x}{+\frac{5}{6}}+\frac{-5}{+\frac{5}{6}}\Rightarrow y=+2\cdot\frac{6}{5}x-{}^{1}\cancel{5}\cdot\frac{6}{{}_{1}\cancel{5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=+2\cdot\frac{6}{5}x-{}^{1}\cancel{5}\cdot\frac{6}{{}_{1}\cancel{5}}\Rightarrow y=+\frac{12}{5}x-6$$

$\boxed{s: y=+\frac{12}{5}x-6}$ [*Retta s* in *Forma Esplicita*]

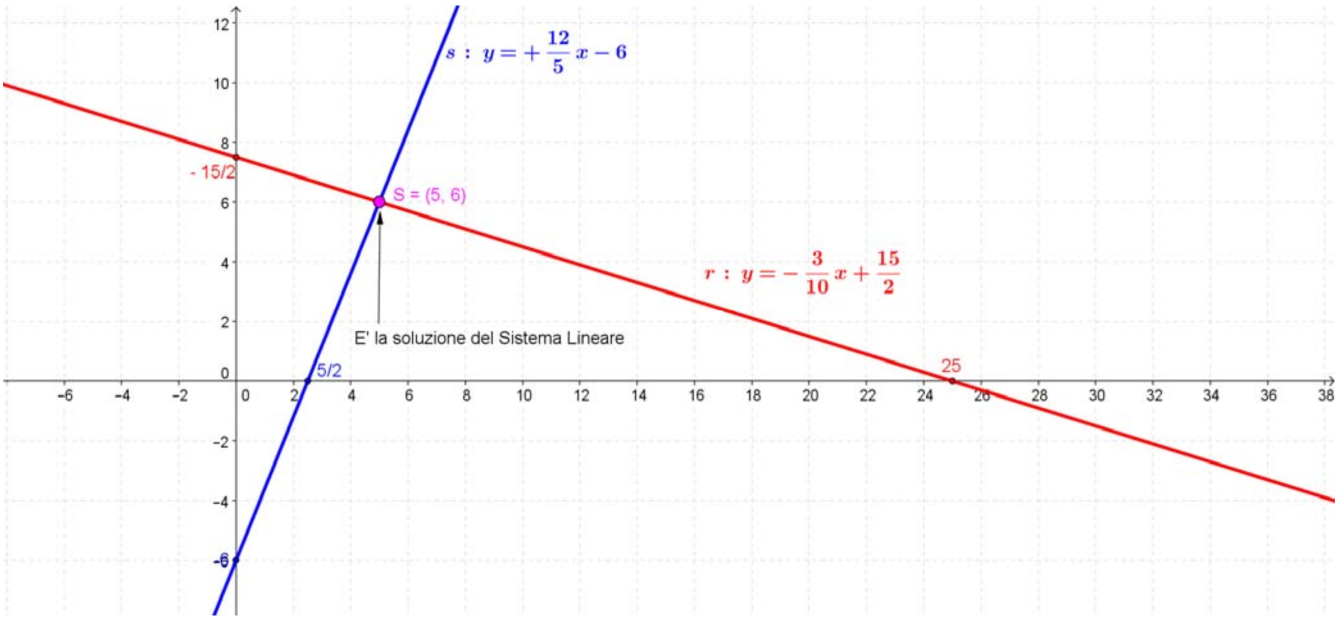
Calcolo delle intersezioni della *Retta s* con l'*Asse x*:

$$\text{Graph}(s)\cap(Asse.x):\begin{cases} y=+\frac{12}{5}x-6 \\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} +\frac{12}{5}x-6=0 \\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} +\frac{12}{5}x=+6 \\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} +\frac{{}^{1}\cancel{5}}{{}_{1}\cancel{12}}\cdot\frac{{}^{1}\cancel{12}}{{}_{1}\cancel{5}}x=+{}^{1}\cancel{6}\cdot\frac{5}{{}_{2}\cancel{12}} \\ y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Graph}(s)\cap(Asse.x)=\left\{\left(+\frac{5}{2};0\right)\right\}$$

Calcolo delle intersezioni della *Retta s* con l'*Asse y*: $\text{Graph}(s)\cap(Asse.y)=\{(0;q)\}=\{(0;-6)\}$.

Rappresentazione Grafica



$$\Rightarrow S=\text{Graph}(r)\cap\text{Graph}(s)=\{(+5;+6)\}$$

☺ ***Verifica Geometrica*: ESITO POSITIVO!** ☺