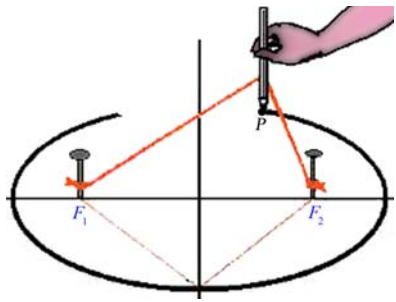
Capitolo 10

"FUNZIONI ed ELLISSE"

10.1 - Definizione (Ellisse come Luogo Geometrico)

Consideriamo un *Piano* π_{xy} e un RC(*Oxy*) su di esso.

Dati *Due* fissati *Punti* $\underline{\boldsymbol{F_1}}$ ed $\underline{\boldsymbol{F_2}}$ ad esso appartenenti detti **Fuochi**, si dice **Ellisse** (*Simbolo* $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$), il *Luogo Geometrico dei Punti* ***P*** tali che sia *Costante* la *Somma delle Distanze di P da* $\boldsymbol{F_1}$ e da $\boldsymbol{F_2}$.



In linguaggio matematico si ha:

$$\mathcal{E} := \left\{ P \in \pi_{xy} \,\middle|\, d\left(P;F_1\right) + d\left(P;F_2\right) = 2a \;;\; 2a > d\left(F_1;F_2\right) \equiv 2c \right\}$$

(Insieme dei punti *P* del *Piano* π_{xy} tali che la distanza dal *Fuoco* F_1 sommata alla distanza di *P* dal *Fuoco* F_2 è sempre pari ad un numero fisso di valore $2a$. Attenzione! La *distanza tra i Vertici* deve essere maggiore della *Distanza Focale*. N.B. Il valore $2a$ rappresenta la *Lunghezza dell'Asse Maggiore del'Ellisse*! L'*Ellisse* appartiene a una famiglia di curve dette *Coniche*.

10.2 – Ellisse Canonica con *Asse Focale* su Asse *x vf*

10.2.a) Equazione dell'Ellisse con *Asse Focale* sull'Asse *x*

L'*Equazione dell'Ellisse* quando l'*Asse x* passa per i *Fuochi* e l'*Asse y* passa per il *Punto Medio* del segmento che li congiunge è data da:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con: } a > b \;;\; a = \overline{OA_1} = \overline{OA_2} \wedge b = \overline{OB_1} = \overline{OB_2}$$

Dove in questo caso *a*, *b* sono i numeri che individuano rispettivamente le *Intersezioni dell'Ellisse* con l'*Asse Cartesiano delle Ascisse* e quello delle *Ordinate*.

10.2.b) Punti Notevoli dell'Ellisse con Asse Focale sull'Asse x

In particolare per l'*Ellisse* si definiscono i seguenti punti notevoli:

I *Punti* **$A_1(-a;0)$** , **$A_2(+a;0)$** , **$B_1(0;+b)$** , **$B_2(0;+b)$** ottenuti intersecando la *Conica* con gli *Assi* Cartesiani, sono detti **Vertici dell'Ellisse** .

I *Punti* **$F_1(-c;0)$** ed **$F_2(+c;0)$** sono detti **Fuochi dell'Ellisse** (con : $a > c$)

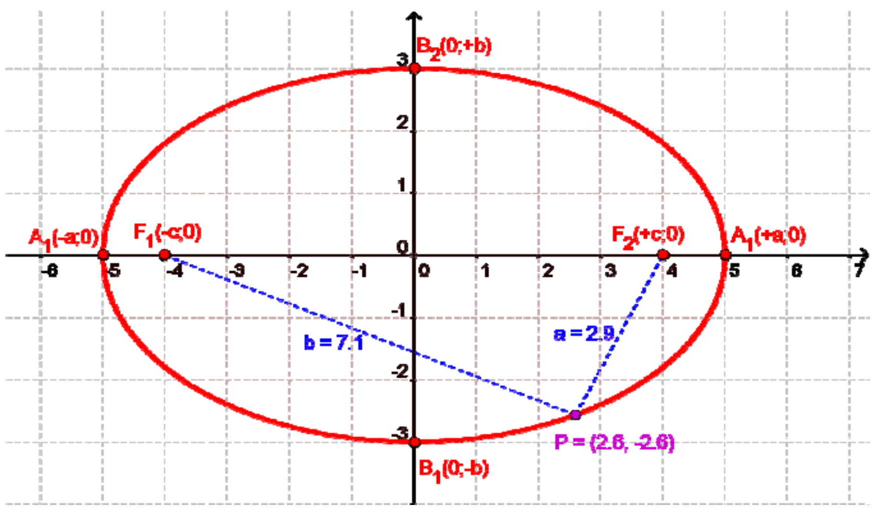
Il *Segmento* **A_1A_2** è detto **Asse Maggiore o Asse Focale dell'Ellisse** e pertanto il *Valore "a"* rappresenta la *Lunghezza del Semi-Asse Maggiore*.

Il *Segmento* **B_1B_2** è detto **Asse Minore dell'Ellisse** e pertanto il *Valore "b"* rappresenta la *Lunghezza del Semi-Asse Minore*.

Il *Segmento* **F_1F_2** ha una lunghezza che è detta **Distanza Focale dell'Ellisse** e pertanto il *Valore "c"* rappresenta la *Semi-distanza Asse Focale*.

10.2.c) Ellisse con Asse Focale su Asse *x* (Relazione Fondamentale)

$$b^2 = a^2 - c^2$$ (N.B.: è coerente dato che: $a > c$)



10.2.d) Eccentricità dell'Ellisse con Asse Focale sull'Asse *x*

Si definisce **Eccentricità dell'Ellisse** il rapporto tra la *Distanza Focale* e la *Lunghezza dell'Asse Maggiore*, cioè:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

N.B.

Il *Valore dell'Eccentricità* ***e*** indica se l'*Ellisse* ha una forma più o meno schiacciata. Si può inoltre osservare che: $a > c \Rightarrow 0 \le e < 1$

L'*Eccentricità* è sempre *Positiva* e *Minore dell'Unità*.

Osservazione

$$e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F_1 \equiv F_2 \equiv O : \textit{Centro della Circonferenza}$$

$$\Rightarrow \text{L'}\textit{Ellisse} \text{ è una } \textit{Circonferenza}$$

In altre parole: la *Circonferenza* è un'*Ellisse* con *Eccentricità Nulla*.

N.B.: Il caso $e = +1$ è un caso molto delicato che andrebbe trattato a parte in quanto la *Conica* non è più un'*Ellisse*.

10.3 – Ellisse Canonica con Asse Focale su Asse *y*

10.3.a) Equazione dell'Ellisse con Asse Focale sull'Asse *y*

L'*Equazione dell'Ellisse* quando l'*Asse y* passa per i *Fuochi* e l'*Asse x* passa per il *Punto Medio* del segmento che li congiunge è data da:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con} \quad b > a$$

Dove in questo caso *a*, *b* individuano rispettivamente le *Intersezioni dell'Ellisse* con *l'Asse Cartesiano delle Ascisse* e quello delle *Ordinate*.

10.3.b) Punti Notevoli dell'Ellisse con Asse Focale sull'Asse *y*

In particolare per l'*Ellisse* si definiscono i seguenti punti notevoli:

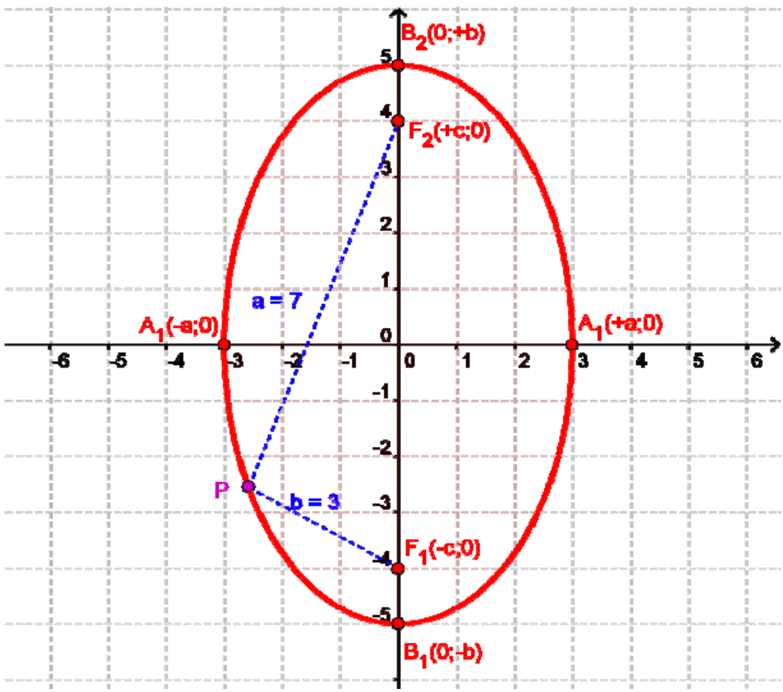
I *Punti* **$A_1(-a;0)$** , **$A_2(+a;0)$** , **$B_1(0;-b)$** , **$B_2(0;+b)$** ottenuti intersecando la *Conica* con gli *Assi* Cartesiani, sono detti **Vertici dell'Ellisse** .

I *Punti* **$F_1(0;-c)$** ed **$F_2(0;+c)$** sono detti **Fuochi dell'Ellisse** (con : $b > c$).

Il *Segmento* **B_1B_2** è detto **Asse Maggiore o Asse Focale dell'Ellisse** e pertanto il *Valore* "*b*" rappresenta la *Lunghezza del Semi-Asse Maggiore*.

Il *Segmento* **A_1A_2** è detto **Asse Minore dell'Ellisse** e pertanto il *Valore* "*a*" rappresenta la *Lunghezza del Semi-Asse Minore*.

Il *Segmento* **F_1F_2** ha una lunghezza che è detta **Distanza Focale dell'Ellisse** e pertanto il *Valore* "*c*" rappresenta la *Semi-distanza Focale*.



10.3.c) Ellisse con Asse Focale su Asse *y* (Relazione Fondamentale)

$a^2 = b^2 - c^2$ (N.B. : è coerente dato che: $b > c$)

da cui risulta: $c^2 = b^2 - a^2$

10.3.d) Eccentricità dell'Ellisse con Asse Focale sull'Asse *y*

Si definisce **Eccentricità dell'Ellisse** il rapporto tra la *Distanza Focale* e la *Lunghezza dell'Asse Maggiore*, cioè:

$$e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$$

N.B.

Il *Valore dell'Eccentricità* ***e*** indica se l'*Ellisse* ha una forma più o meno schiacciata. Si può inoltre osservare che:

$$b > c \Rightarrow 0 \leq e < 1$$

L'*Eccentricità* è sempre *Positiva* e *Minore dell'Unità*.

Osservazione

$$e = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow F_1 \equiv F_2 \equiv C : Centro\ della\ Circonferenza$$

(?) Se per assurdo dovesse essere: $e = 1$, cosa si potrebbe dedurre?

$$e = 1 \Rightarrow c = b \wedge a = 0 \Rightarrow \mathcal{E} \equiv B_1B_2$$

L'*Ellisse*, riducendosi all'*Asse Maggiore*, diventa *Degenere*.

Osservazione (Simmetrie dell'Ellisse in Forma Canonica)

Sia nel caso in cui $(Asse.Focale) \subset (Asse.x)$ che quello in cui si ha che $(Asse.Focale) \subset (Asse.y)$, risulta che: l'*Ellisse* ha come *Assi di Simmetria* entrambi gli *Assi Cartesiani* (si parla di *Simmetrie Assiali*) e come *Centro di Simmetria* l'*Origine degli Assi* (si parla di *Simmetria Centrale*).

10.4 – Area della Regione di Piano Delimitata dall'Ellisse

L'*Ellisse* di *Equazione*:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

delimita una regione finita di piano $\mathcal{D}$ che si può rappresentare analiticamente

mediante la disequazione: $$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

Si dimostra con il calcolo infinitesimale che:

$$\text{Area}(\mathcal{E}) = \pi \cdot a \cdot b$$

dove a e b sono sempre le *Lunghezze dei Semiassi dell'Ellisse*.

<u>Osservazione (Area di un'Ellisse Particolare)</u>

$$a = b \Rightarrow \mathcal{E}\ \textit{Circonferenza} \Rightarrow \ \text{Area}(\mathcal{E}) = \pi \cdot a^2$$

dove a rappresenta in questo caso il *Raggio della Circonferenza*.

Pertanto, il risultato è coerente con la teoria della *Geometria Euclidea*.

<u>Osservazione (Posizione di un Punto del Piano risp. ad un'Ellisse)</u>

$$P(x_P; y_P) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{{x_P}^2}{a^2} + \frac{{y_P}^2}{b^2} = 1$$

$$P(x_P; y_P)\ \textit{Interno ad}\ \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{{x_P}^2}{a^2} + \frac{{y_P}^2}{b^2} < 1$$

$$P(x_P; y_P)\ \textit{Externo ad}\ \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{{x_P}^2}{a^2} + \frac{{y_P}^2}{b^2} > 1$$