13.09 - Definizione (Funzioni Continue in un Punto)

$f : \mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 *Punto di Accumulazione per* $\mathrm{Dom}\, f$

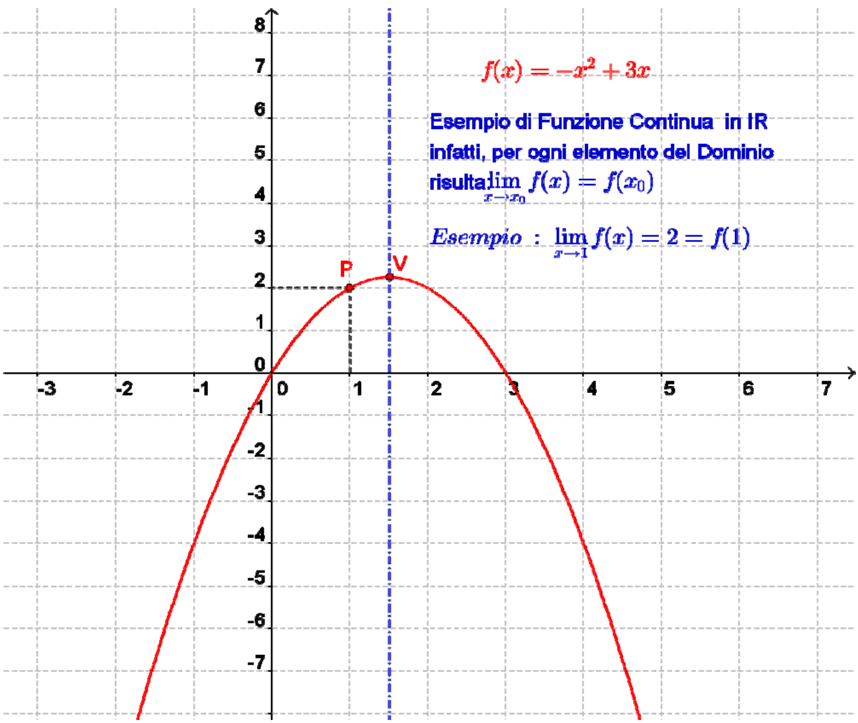
Diremo che **<u>f(x) Funzione Continua nel Punto x_0</u>** se e soltanto se <u>esiste</u> il suo *limite per* $x \to x_0$ e tale *limite* è uguale al valore $f(x_0)$ ovvero al *Valore di f calcolata in* x_0.

In matematichese:

$$\underline{\underline{f(x)\ \text{Funzione Continua nel Punto}\ x_0}} :\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Considerando la funzione: $f_1(x) = -x^2 + 3x$ risulta che essa è sempre definita in IR. Ci si chiede: tale funzione è *Continua* in $x_0=+1$?

La risposta è affermativa in quanto: $\lim_{x \to 1} f_1(x) = 2 = f(1)$.



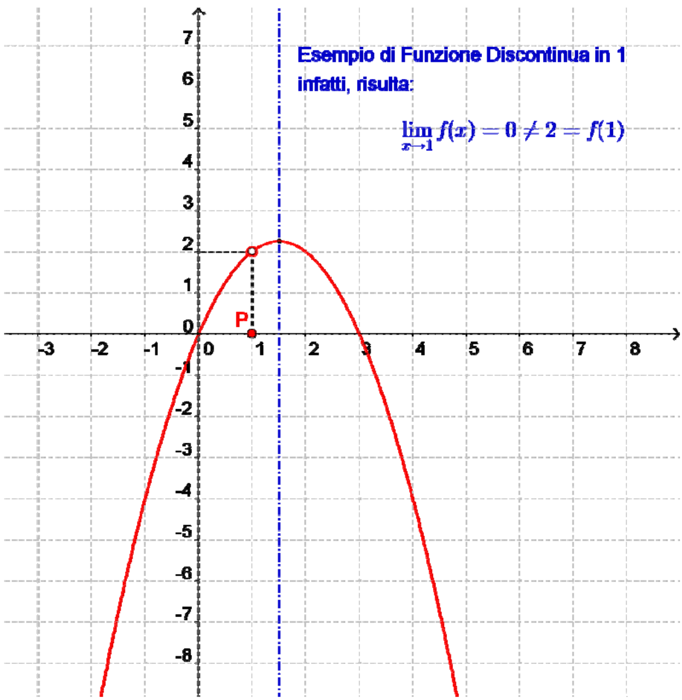
1. $\exists \lim_{x\to 1^-} f_1(x) = \lim_{x\to +1^-}\left[-x^2+3x\right] = -(1^-)^2+3\cdot(1^-) = -1+3 = +2 \equiv l_1 \in \mathbb{R}$
2. $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to +1^+}\left[-x^2+3x\right] = -(1^+)^2+3\cdot(1^+) = -1+3 = +2 \equiv l_2 \in \mathbb{R}$
3. $l_1 = +2 = l_2$
4. $f(+1) = -(+1)^2+3\cdot(+1) = -1+3 = +2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ Funzione Continua in $x_0 = +1$

Apportando una piccola modifica alla precedente *Funzione* che è sempre definita e *Continua* ovunque in IR, si ottiene una *Funzione Discontinua*. Si può ad esempio considerare a partire da essa, la seguente *Funzione Definita per Casi*:

$$f_2(x) = \begin{cases} -x^2+3x & \text{per } x \in \mathbb{R} - \{+1\} \\ 0 & \text{per } x = +1 \end{cases}$$

Essa sarà ovviamente *Discontinua nel Punto* $x = 1$ in quanto, il suo *Limite* per *x Tendente* ad 1, non coincide con il *Valore f*(1) ovvero è differente da quello che potremmo chiamare "*Valore Atteso*".



13.10 - Definizione (Funzioni Continue a Dex e Continue a Sx)

Se consideriamo il *Limite Dex* ed il *Limite Sx* di una *Funzione* possiamo dare le seguenti *definizioni*:

$$\underline{\underline{f(x)\ \text{Funzione Continua a Destra in}\ x_0}} :\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

$$\underline{\underline{f(x)\ \text{Funzione Continua a Sinistra in}\ x_0}} :\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

IMMAGINE MANCANTE

WORK IN PROGRESS

13.11 - Caratterizzazione Tecnica (Continuità in un Punto)

$$\underline{\underline{f \text{ Funzione Continua nel Punto } x_0}} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \ \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \\ 2. \ \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \\ 3. \ l_1 = l_2 =: l \\ 4. \ \exists f(x_0) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$$

13.12 - Definizione (Funzioni Continue in un Insieme)

$f : \text{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ X \subseteq \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{f \text{ Funzione Continua in } X}} :\Leftrightarrow \forall x \in X : f \ \textit{Continua in } x$$

Ovvero,

f *Continua* *su un Insieme* **X** ses se essa è *Continua* in ogni suo *Punto.*

<u>*Notazione*</u> Indichiamo con $\underline{\underline{\Im_C(f)}}$: **<u>Insieme di Continuità di f</u>**

l'insieme definito come segue :

$$\underline{\underline{\Im_C(f) := \{ x_0 \in \text{Dom} f \mid f \ \textit{Continua in } x_0 \} \subseteq \text{Dom} f}}$$

13.13 - Definizione (Funzioni Continue)

$f : \text{Dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{f \ \textbf{Funzione Continua}}} :\Leftrightarrow \forall x \in \text{Dom} f : f \ \textit{Continua} \text{ in } x$$

Ovvero,

quando si dice che f *Continua* senza specificare su quale insieme, quando essa è *Continua in Ogni Punto del suo Dominio.*