13.17.c) Punti di Discontinuità Eliminabile o di III Specie.

$f(x)$ *ha in* x_0 *una* **Discontinuità Eliminabile** (oppure **di III Specie**) $:\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1.\ \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \\ 2.\ \exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} \\ 3.\ l_1 = l_2 =: l \\ 4.\ \left(\nexists f(x_0)\right) \vee \left(f(x_0) \neq l\right) \end{cases}$$

Nel primo caso **(IIIa)** si ha una: **Removable Discontinuity**
Nel secondo caso **(IIIb)** si ha una: **Point Discontinuity**

Caso (a) (Removable Discontinuity)

Tali *Punti di Discontinuità* sono anche detti *Punti di Discontinuità Eliminabile* poiché, se la *funzione* non è definita in x_0, è possibile estendere il suo *Campo di Esistenza* a tale punto rimuovendo tale *Singolarità* attribuendo alla *funzione* nel *Punto* x_0 il valore del *Limite* in quel *Punto* nel modo seguente:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \in \mathrm{Dom}\, f \\ l & \text{per} \quad x = x_0 \end{cases}$$

La nuova *funzione* è adesso *Continua* anche nel *Punto* x_0. Poiché è verificata anche la IV richiesta della definizione di *Continuità in un Punto*.

Esempio di Discontinuità Specie IIIa (Removable Discontinuity)

Studiare la *Continuità* nel suo *Dominio* della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

È evidente che:

$$\mathrm{Dom}\, f : x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq +1 \Rightarrow x \neq +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{+1\} = \left]-\infty\,;+1\right[\cup \left]+1\,;+\infty\right[$$

Si indaga sulla *Continuità di f* per $x = +1$.
Risulta che:

1. $\lim_{x\to+1^-} f(x) = \frac{0}{0}$ [F.I.]

$$\lim_{x\to+1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\begin{array}{c}\text{Prodotto Notevole}\\ \text{Differenza Quadrati}\end{array}\right] = \lim_{x\to+1^-} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} =$$

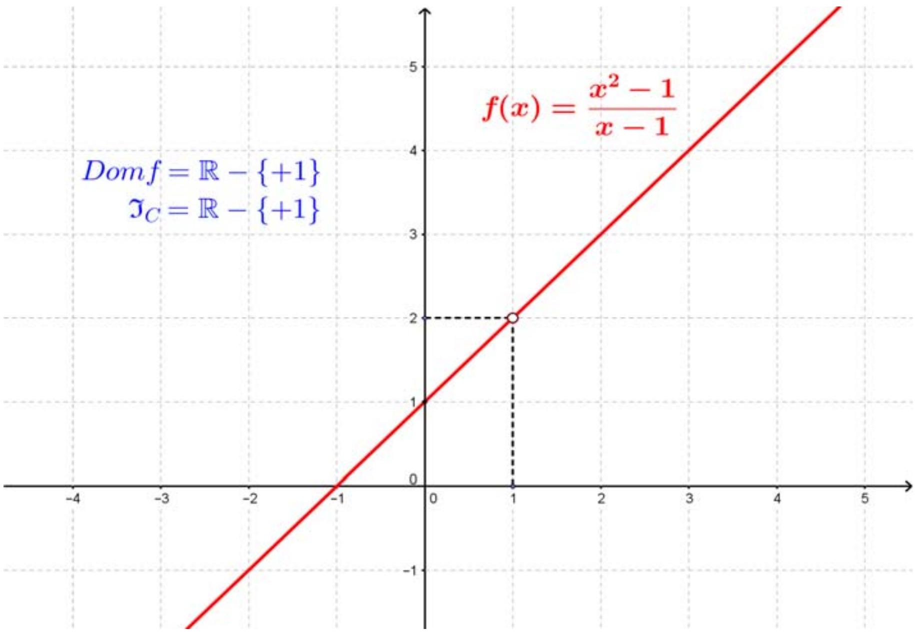
$$= \lim_{x\to+1^-}(x+1) \underset{\text{PAL}}{=} +1^- +1 = +2 =: l_1 \in \mathbb{R}$$

2. $\lim_{x\to+1^+} f(x) = \frac{0}{0}$ [F.I.]

Analogamente: $\lim_{x\to+1^+} f(x) = \lim_{x\to+1^-}(x+1) \underset{\text{PAL}}{=} +1^+ +1 = +2 =: l_2 \in \mathbb{R}$

3. $l_1 = +2 = l_2$

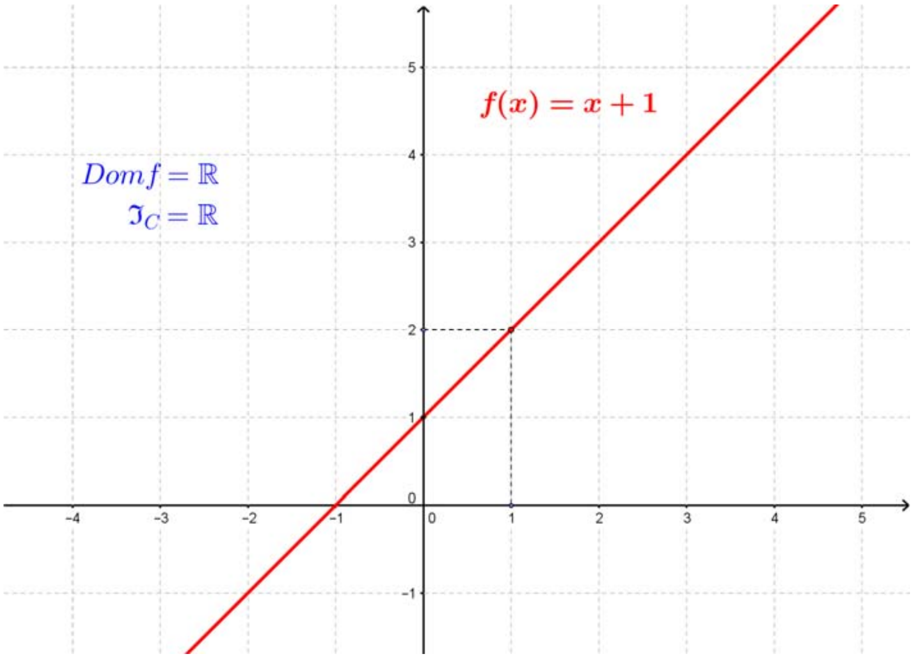
4. $\cancel{\exists}\, f(+1)$ (perché: $x = +1 \notin \text{Dom } f$)



Osservazione (importante) sul grafico di $f(x)$

Il grafico della *Funzione* $f(x)$ coincide con il grafico della *Funzione* nell'insieme $\mathbb{R} - \{+1\}$:

$$f(x) = x+1$$



Pertanto per Def. 13.17(c): f *Non Continua nel* nel *Punto* $x_0 = +1$ in quanto presenta una Discontinuità di III Specie di tipo *Removable Discontinuity*.

Si è detto che è possibile rimuovere in questo caso la singolarità attribuendo alla *funzione* nel *Punto* x_0 il valore del *Limite* in quel punto nel modo seguente:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \in \text{Dom} f \\ l & \text{per} \quad x = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \in \text{Dom} f \\ +2 & \text{per} \quad x = +1 \end{cases}$$

Esempio di Discontinuità Specie IIIb (Point Discontinuity)

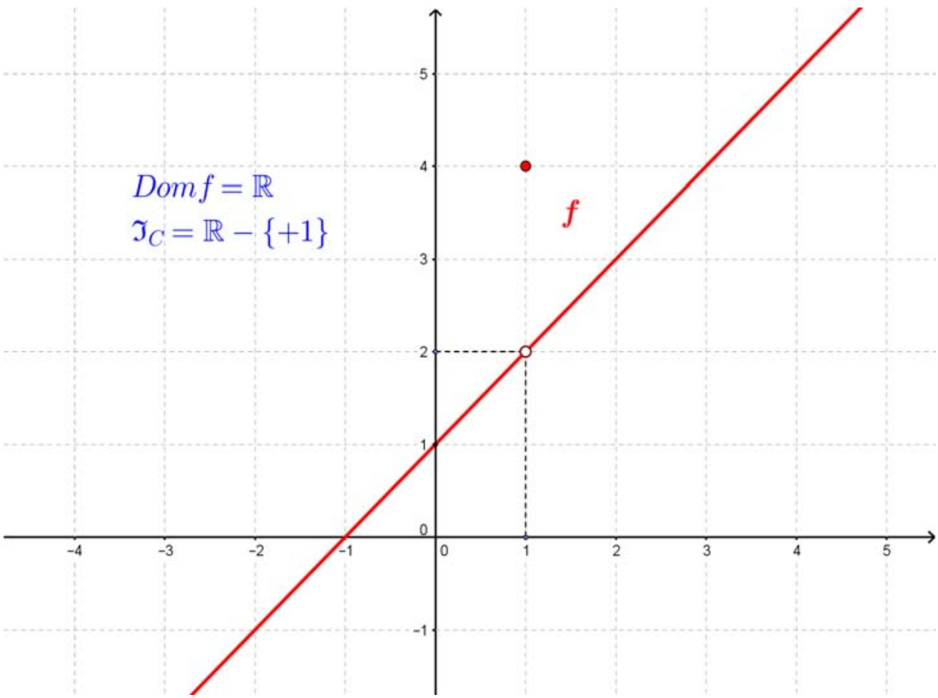
Studiare la *Continuità* nel suo *Dominio* della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{per} \quad x \neq +1 \\ +4 & \text{per} \quad x = +1 \end{cases}$$

È evidente che: $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

Si indaga sulla *Continuità di f* per $x = +1$.

Poiché $f(x)$ è una *funzione definita per casi* i punti di "sospetta discontinuità" sono quelli "di passaggio" da un caso all'altro. In questo caso s'indaga pertanto sulla *Continuità di f* per $x = +1$.



Risulta che:

$$\begin{cases}
1. \quad \lim_{x \to +1^-} f(x) = \dfrac{0}{0} \quad [\text{ F.I. }] \\[2ex]
\quad \lim_{x \to +1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\begin{array}{c} \text{Prodotto Notevole} \\ \text{Differenza Quadrati} \end{array} \right] = \lim_{x \to +1^-} \dfrac{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \\[2ex]
\quad = \lim_{x \to +1^-} (x+1) \underset{\text{PAL}}{=} +1^- + 1 = +2 =: l_1 \in \mathbb{R} \\[2ex]
2. \quad \lim_{x \to +1^+} f(x) = \dfrac{0}{0} \quad [\text{ F.I. }] \\[2ex]
\quad \text{Analogamente: } \lim_{x \to +1^+} f(x) = \lim_{x \to +1^-} (x+1) \underset{\text{PAL}}{=} +1^+ + 1 = +2 =: l_2 \in \mathbb{R} \\[2ex]
3. \quad l_1 = +2 = l_2 \\[2ex]
4. \quad f(x_0) = f(+1) = +4 \neq +2 = l
\end{cases}$$

Pertanto per Def. 13.17(c): f *Non Continua nel* nel *Punto* $x_0 = +1$ in quanto presenta una Discontinuità di III Specie di tipo *Removable Discontinuity*.