4.03 - Moto Rettilineo Vario (Moto Rettilineo Accelerato)

I moti che si presentano nella realtà non sono in genere *Moti Uniformi*, quelli più diffusi, infatti, sono i *Moti Vari* come, ad esempio: il moto di un'automobile che si muove nel traffico cittadino, il moto di un atleta durante una gara, il moto di un ciclista, il moto di un vaso che cade da un balcone.

4.03.a) Definizione (Moto Vario)

Si definisce **Moto Vario** un moto in cui un *Corpo* percorre *Spazi* uguali *in Tempi* generalmente diversi e quindi il moto avviene con *Velocità Istantanea Non Costante*.

4.03.b) Definizione (Velocità Media nel Moto Rettilineo)

Se un *Punto Materiale* si sposta di *Moto Rettilineo* su una *Retta Orientata* da una *Posizione di Coordinata* $x(t_i)$ a una *Posizione di Coordinata* $x(t_f)$ in un certo *Intervallo di Tempo* [t_i ; t_f], il rapporto tra la *Variazione di Posizione* $\Delta x = x(t_f) - x(t_i)$ e la *Variazione di Tempo* Δt è detta **Velocità Media** lungo la *Direzione del Moto*:

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}}$$

4.03.c) Osservazione (Senso di una Velocità Negativa)

Fermo restando che il *Modulo di un Vettore* per definizione è una quantità sempre positiva, la *Velocità* potrebbe assumere *Valori Positivi* o *Valori Negativi* e allora ci si chiede: che senso hanno questi ultimi? Se dal calcolo della *Velocità* si ottiene un *Valore Negativo* vuol dire che il *Punto Materiale* è in *Moto* nel *Verso Opposto* rispetto a quello della *Retta Orientata* che rappresenta la *Traiettoria del Moto Rettilineo*.

4.03.d) Velocità Media in Forma Vettoriale

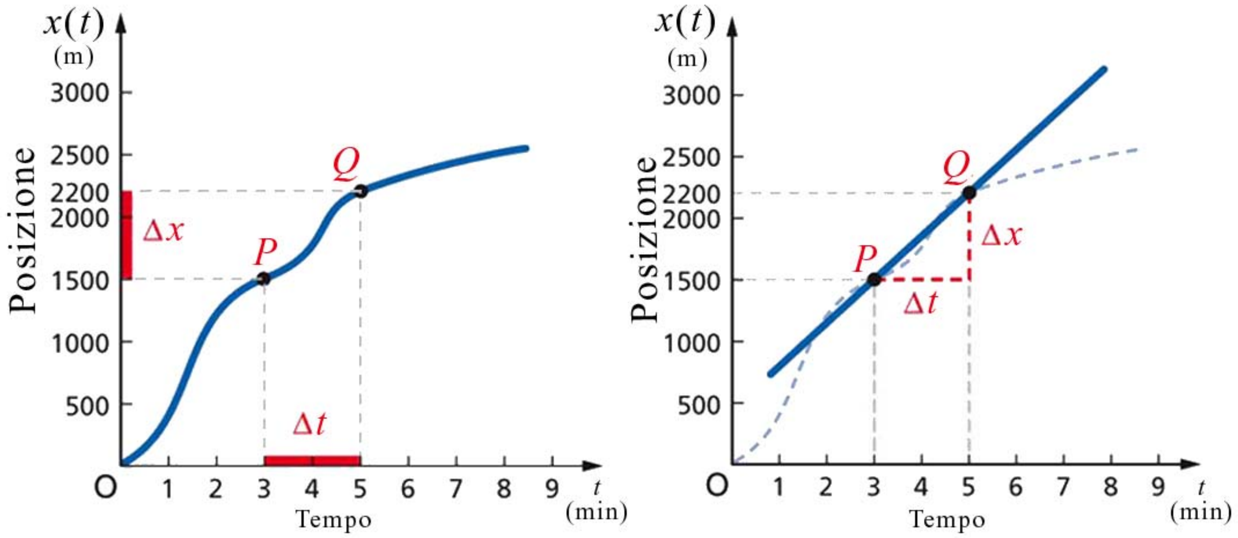
$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)}{t_f - t_i}} \quad \text{con: } \Delta\vec{x} \text{ Vettore Spostamento}$$

Dalla definizione si deduce che:
$$\begin{cases} \text{mod}\left(\vec{v}_m\right) : v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} & \text{(Accelerazione Scalare Media)} \\ \text{dir}\left(\vec{v}_m\right) \equiv \text{dir}\left(\Delta\vec{x}\right) & \\ \text{vrs}\left(\vec{v}_m\right) \equiv \text{vrs}\left(\Delta\vec{x}\right) & \text{(perché } \Delta t > 0 \text{ e quindi...)} \end{cases}$$

In un *Moto Rettilineo* la *Direzione* del *Vettore Spostamento* $\Delta\vec{x}$ e della *Velocità Media* coincidono con la *Direzione della Traiettoria Rettilinea* e dunque tali *Vettori* giacciono su di essa.

4.03.e) Diagramma Orario Spazio-Tempo nel Moto Rettilineo Vario

Alcune proprietà del *Moto di un Punto Materiale* possono essere studiate mediante una rappresentazione grafica, riportando in ascisse i *Tempi* misurati e in ordinate le *Posizioni del Punto Materiale* (intese come le *Distanze dal Punto O* considerato come *Posizione di Riferimento del Moto*). Il *Diagramma del Moto* non sarà costituito da una *spezzata* avente come vertici i punti corrispondenti alle misure effettuate, poiché in tal caso la *Velocità Istantanea del Punto Materiale* dovrebbe essere rigorosamente costante nell'*Intervallo di Tempo* che intercorre tra due misure successive. Il diagramma sarà dunque rappresentato da una linea curva ad esempio come quella nella figura seguente.



Si ponga adesso l'attenzione su due generici *Istanti*, per esempio $t_i = 3$ s e $t_f = 5$ s ai quali corrispondono sul grafico il *Punto P* e *Punto Q*. Ci si chiede cosa rappresenti graficamente la *Velocità Media del Punto Materiale* nell'*Intervallo di Tempo di Durata* $\Delta t = t_f - t_i$. La risposta è semplice e viene direttamente dalla definizione di *Velocità Media*:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{2.200 \text{ m} - 1.500 \text{ m}}{5 \text{ s} - 3 \text{ s}} = \frac{700 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 350 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dalla *Geometria Analitica*, si deduce che questa espressione rappresenta il *Coefficiente Angolare della Retta Secante la Curva* $x(t)$ nei *Punti P* e *Q*.

Pertanto:

La *Velocità Media* tra due *Istanti* t_i e t_f nel *Grafico Spazio-Tempo* è uguale alla *Pendenza della Retta Secante* tale grafico nei *Punti* P (t_i ; $x(t_i)$) e Q (t_f ; $x(t_f)$).

In seconda istanza si fissa l'attenzione su un singolo istante, ad esempio t_i e ci si chiede cosa rappresenti graficamente la *Velocità Istantanea del Punto Materiale nell'Istante* t_i. Calcolare la *Velocità Istantanea* vuol dire determinare quanto vale la *Velocità* in questo preciso *Istante*. Dal punto di vista grafico, vuol dire che t_f si avvicina sempre più a t_i e quindi Δt alla fine (o meglio "al limite") vale zero. Cosa succede alla *Retta Secante* la nostra curva nei punti *P* e *Q*? Accade che se t_f tende ad avvicinarsi fino a sovrapporsi con t_i, corrispondentemente *P* tende ad avvicinarsi fino a sovrapporsi con *Q* e quindi, quella che era una *Retta Secante*, adesso diventa una *Retta Tangente* e quindi, sempre dalla *Geometria Analitica*, si deduce che la *Velocità Istantanea* rappresenta il *Coefficiente Angolare della Retta Tangente la Curva* $x(t)$ nel *Punto P*. L'idea completa di questa grandezza di avrà però soltanto dopo che avremo definito rigorosamente la *Velocità Istantanea*.

4.03.f) Definizione (Velocità Istantanea nel Moto Rettilineo)

Nel *Moto Vario* la *Velocità Istantanea* è un vettore che dipende dal *Tempo*. Per sottolineare questo aspetto si scrive $\vec{v}(t)$ e si legge "*Velocità* posseduta dal *Punto Materiale all'Istante t*".

La **<u>Velocità Istantanea Lungo la Direzione del Moto Rettilineo</u>** in un *Generico Istante* t_i è il *Vettore* a cui tende la *Velocità Media* $\vec{v}_m$ calcolata *nell'Intervallo di Tempo*:

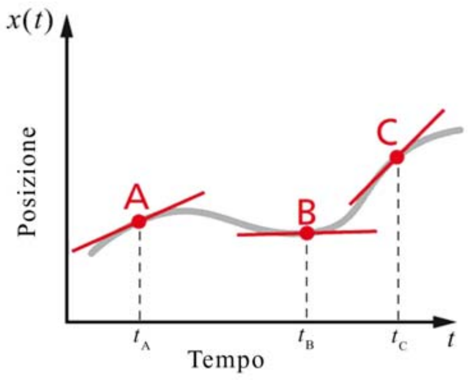
$$[\,t_i\,;\,t_f\,] = [\,t_i\,;\,t_i + \Delta t\,] \quad \text{al } \textit{Tendere di } \Delta t \text{ a } \textit{Zero.}$$

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}\right)$$

4.03.g) Interpretazione Geometrica della Velocità Istantanea nel Moto Rettilineo

Facendo tendere a zero l'ampiezza dell'*Intervallo di Tempo* Δt anche lo *Spostamento* Δx diventa sempre più piccolo.

Geometricamente, come illustrato nella seguente figura, la *Velocità Scalare Istantanea* $v(t)$ *in un certo Istante t* non è altro che la *Pendenza della Retta Tangente alla Diagramma Orario nel Punto di Ascissa t*.



4.03.h) Velocità Media e Istantanea nel M.R.U.

In un M.R.U. la *Velocità Media* e la *Velocità Istantanea* coincidono. Tale osservazione è confermata anche dall'interpretazione geometrica, poiché entrambe le *Velocità* coincidono con la *Pendenza* della *Retta* che rappresenta lo *Spostamento in Funzione del Tempo* in quanto qualunque

Secante (associata alla *Velocità Media*) o *Tangente* (associata alla *Velocità Istantanea*) al *Diagramma Orario* coincide con lo stesso *Diagramma Orario*.

4.03.i) Vettore Variazione di Velocità nel Moto Rettilineo)

Considerato l'*Intervallo di Osservazione*:

$$[\, t_i \,;\, t_f \,] = [\, t_i \,;\, t_i + \Delta t]$$

e le corrispondenti *Velocità Istantanee* all'*Istante Iniziale* $\vec{v}(t_i)$ e quella all'*Istante Finale di Osservazione*: $\vec{v}(t_f)$ la *Variazione di Velocità* è il seguente *Vettore Differenza*:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)$$

Osservazione

- Nel *Moto Rettilineo* la *variazione di Velocità* $\Delta\vec{v}$, poiché è la *Differenza di Due Vettori* che hanno la stessa *Direzione del Moto*, è un *Vettore* avente ancora tale *Direzione*.
- Nel *Moto Piano* o nei *Moti nello Spazio*, la *Velocità* può variare anche in *Direzione* e quindi anche la *Differenza di Due Vettori* non è più detto che abbia la stessa *Direzione del Moto*.

4.03.j) Corpi Accelerati & Corpi Decelerati

- Un corpo si dice **Corpo Accelerato** o che se si muove di **Moto Accelerato** se e solo se il modulo della sua *Velocità* aumenta al passare del *Tempo*.
- Un corpo si dice **Corpo Decelerato** o che se si muove di **Moto Decelerato** se e solo se il modulo della sua *Velocità* diminuisce al passare del *Tempo*.

Questo concetto è abbastanza chiaro se si pensa alla frase "l'automobile accelera" quando si pigia sul pedale dell'acceleratore oppure "l'automobile decelera" quando sul pedale del freno.

4.03.k) Definizione (Accelerazione Media)

Si definisce **Accelerazione Media di un Punto Materiale in un Intervallo di Tempo [t_i ; t_f]** è la grandezza fisica che descrive la rapidità di variazione della *Velocità del Punto Materiale* in un determinato *Intervallo di Tempo* [t_i ; t_f].

Dal punto di vista quantitativo tale grandezza si esprime con il rapporto:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}}$$

Dalla definizione si deduce che:
$$\begin{cases} \mathrm{mod}(\vec{a}_m) : v_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \\ \mathrm{dir}(\vec{a}_m) \equiv \mathrm{dir}(\Delta\vec{v}) \\ \mathrm{vrs}(\vec{a}_m) \equiv \mathrm{vrs}(\Delta\vec{v}) \quad \text{(perché } \Delta t > 0 \text{ e quindi...)} \end{cases}$$

In un *Moto Vario* la *Velocità* varia istante per istante e quindi è sempre presente un'*Accelerazione* che varia da un istante all'altro.

Osservazione (importante)

In un *Moto Rettilineo* la *Direzione* del *Vettore Variazione di Velocità* $\Delta\vec{v}$ e dell'*Accelerazione Media* $\vec{a}_{\mathrm{m}}$ coincidono con la *Direzione della Traiettoria Rettilinea* e dunque tali *Vettori* sono paralleli ad essa.

4.03.*l*) Analisi Dimensionale e Unità di Misura (Accelerazione Media)

$$[a]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\frac{[v]}{[t]}=[v]\cdot\frac{1}{[t]}=\frac{[l]}{[t]}\cdot\frac{1}{[t]}=\frac{[l]}{[t]^2}=[l]\cdot[t]^{-2}$$

4.03.m) Unità di Misura (Accelerazione Media)

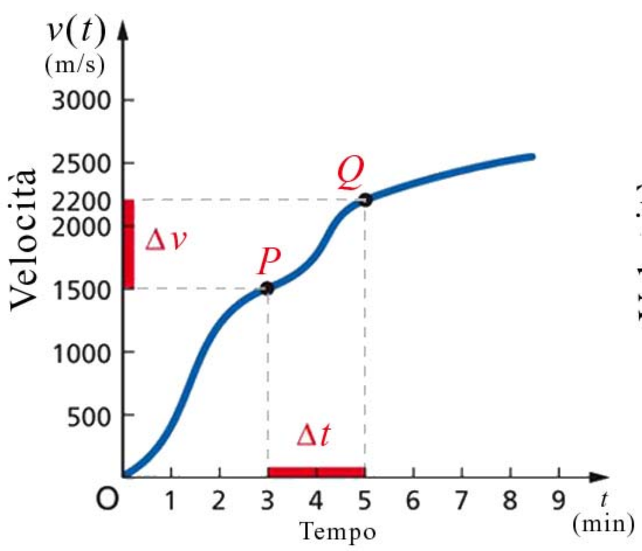
$$[a]=\frac{[l]}{[t]^2}\Rightarrow \textbf{Unità di Misura (SI) della Velocità: } \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

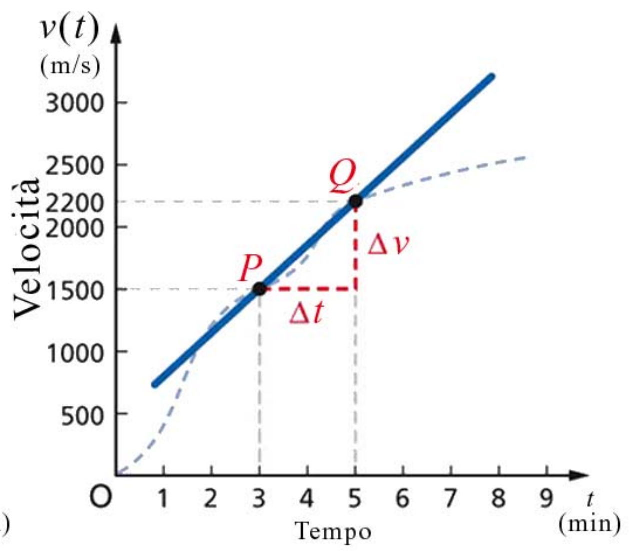
Un *Punto Materiale* avente ha l'*Accelerazione* pari a $1\ \mathrm{m/s^2}$ è un *Punto Materiale* che si muove con la *Velocità* che varia di a $1\ \mathrm{m/s}$ per ciascun secondo.

Con un ragionamento analogo a quello che ci ha condotti al concetto di *Velocità Istantanea* si definisce anche l'*Accelerazione Istantanea*.

4.03.n) Diagramma Orario Velocità-Tempo nel Moto Rettilineo Vario

Alcune proprietà del *Moto di un Punto Materiale* possono essere studiate mediante una rappresentazione grafica, riportando in ascisse i *Tempi* misurati e in ordinate le *Velocità Istantanee del Punto Materiale*. Il *Diagramma Orario delle Velocità* non sarà costituito da una *spezzata* avente come vertici i punti corrispondenti alle misure effettuate, poiché in tal caso l'*Accelerazione Istantanea del Punto Materiale* dovrebbe essere rigorosamente costante nell'*Intervallo di Tempo* che intercorre tra due misure successive. Il diagramma sarà dunque rappresentato da una linea curva ad esempio come quella nella figura seguente.





Si ponga adesso l'attenzione su due generici *Istanti*, per esempio $t_i = 3$ s e $t_f = 5$ s ai quali corrispondono sul grafico il *Punto P* e *Punto Q*. Ci si chiede cosa rappresenti graficamente l'*Accelerazione Media del Punto Materiale* nell'*Intervallo di Tempo di Durata* $\Delta t = t_f - t_i$. La risposta è semplice e viene direttamente dalla definizione di *Accelerazione Media*:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_f) - v(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{2.200\ \frac{m}{s} - 1.500\ \frac{m}{s}}{5\ s - 3\ s} = \frac{700\ \frac{m}{s}}{2\ s} = 350\ \frac{m}{s^2}$$

Dalla *Geometria Analitica*, si deduce che questa espressione rappresenta il *Coefficiente Angolare della Retta Secante la Curva v*(t) nei *Punti P* e *Q*.

Pertanto:

L'Accelerazione Media tra due *Istanti* t_i e t_f nel *Grafico Velocità-Tempo* è uguale alla *Pendenza della Retta Secante* tale grafico nei *Punti P* (t_i ; $x(t_i)$) e *Q* (t_f ; $x(t_f)$).

In seconda istanza si fissa l'attenzione su un singolo istante, ad esempio t_i e ci si chiede cosa rappresenti graficamente l'*Accelerazione Istantanea del Punto Materiale nell'Istante* t_i. Calcolare l'*Accelerazione Istantanea* vuol dire determinare quanto vale l'*Accelerazione* in questo preciso *Istante*. Dal punto di vista grafico, vuol dire che t_f si avvicina sempre più a t_i e quindi Δt alla fine (o meglio "al limite") vale zero. Cosa succede alla *Retta Secante* la nostra curva nei punti *P* e *Q*? Accade che se t_f tende ad avvicinarsi fino a sovrapporsi con t_i, corrispondentemente *P* tende ad avvicinarsi fino a sovrapporsi con *Q* e quindi, quella che era una *Retta Secante*, adesso diventa una *Retta Tangente* e quindi, sempre dalla *Geometria Analitica*, si deduce che l'*Accelerazione Istantanea* rappresenta il *Coefficiente Angolare della Retta Tangente la Curva v*(t) nel *Punto P*. L'idea completa di questa grandezza di avrà però soltanto dopo che avremo definito rigorosamente l'*Accelerazione Istantanea*.

4.03.o) Definizione (Accelerazione Istantanea)

Nel *Moto Vario* l'*Accelerazione Istantanea* è un vettore che dipende dal *Tempo*. Per sottolineare ciò si scrive $\vec{a}(t)$ e si legge "*Accelerazione* posseduta dal *Punto Materiale all'Istante t*".

L'**Accelerazione Istantanea Lungo la Direzione del Moto Rettilineo** in un *Generico Istante* t_i è il *Vettore* a cui tende l'*Accelerazione Media* $\vec{a}_m$ calcolata *nell'Intervallo di Tempo*:

$$[\, t_i ; t_f \,] = [\, t_i ; t_i + \Delta t \,] \quad \text{al } \textit{Tendere di } \Delta t \text{ a } \textit{Zero.}$$

$$\vec{a}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)$$

4.03.p) Accelerazione Scalare Istantanea

Dalla definizione si deduce che in modulo: $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right)$

Inoltre, nel caso del *Moto Rettilineo*:

$$\mathrm{dir}\left(\vec{a}(t)\right) \equiv \mathrm{dir}\left(\vec{x}(t)\right) \equiv \text{Direzione del Moto}$$

4.03.q) Segno dell'Accelerazione Scalare Media/Istantanea

$$\begin{cases} \text{Direzione del Moto} \equiv \text{Verso Positivo Asse Riferimento} \\ v(t) \text{ Crescente nel Tempo} \Rightarrow \Delta v > 0 \Rightarrow \textit{Accelerazione} \end{cases} \Rightarrow a_{\mathrm{m}} > 0 \ \wedge \ a(t) > 0$$

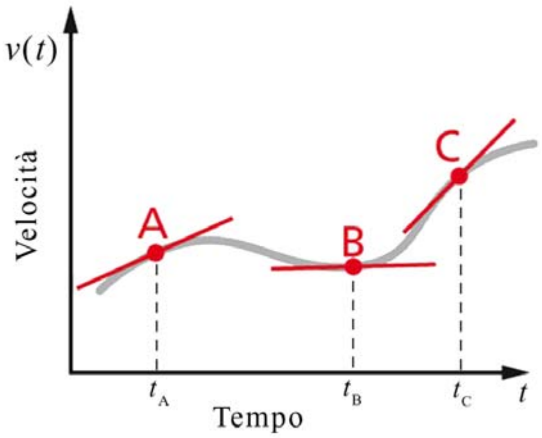
$$\begin{cases} \text{Direzione del Moto} \equiv \text{Verso Positivo Asse Riferimento} \\ v(t) \text{ Decrescente nel Tempo} \Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow \textit{Decelerazione} \end{cases} \Rightarrow a_{\mathrm{m}} < 0 \ \wedge \ a(t) < 0$$

$$\begin{cases} \text{Direzione del Moto} \equiv \text{Verso Negativo Asse Riferimento} \\ v(t) \text{ Crescente nel Tempo} \Rightarrow \Delta v < 0 \Rightarrow \textit{Accelerazione con Verso Negativo} \end{cases} \Rightarrow a_{\mathrm{m}} < 0 \ \wedge \ a(t) < 0$$

4.03.r) Interpretazione Geometrica dell'Accelerazione Istantanea nel Moto Rettilineo

Facendo tendere a zero l'ampiezza dell'*Intervallo di Tempo* Δt anche lo *Spostamento* Δv diventa sempre più piccolo.

Geometricamente, come illustrato nella seguente figura, l'*Accelerazione Scalare Istantanea* $a(t)$ *in un certo Istante* t non è altro che la *Pendenza della Retta Tangente alla Diagramma Orario delle Velocità nel Punto di Ascissa t.*



Osservazione (Accelerazione nel M.R.U.)

$$\textit{Moto Rettilineo Uniforme} \Leftrightarrow \vec{v} \textit{ Costante} \Leftrightarrow \textit{Accelerazione } \vec{a} = \vec{0}$$