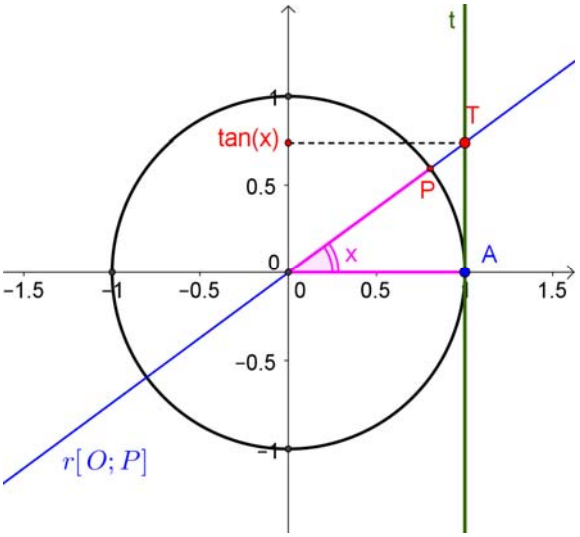
12.10 - La Funzione Tangente Goniometrica

12.10.a) Definizione di Tangente di un Angolo

Data una *Circonferenza Goniometrica* e un *Angolo x* su di essa, per definire la *Tangente di x* si procede come segue:

- Condurre la *Retta t Tangente alla Circonferenza Goniometrica* nel *Punto A*;
- Condurre la *Retta r*[*O*;*P*];
- Si tracci il *Punto T* definito come:

$$\{T\} := r[O;P] \cap t$$



Sotto queste ipotesi, si definisce:

<u>Tangente dell'Angolo Orientato *x*</u>

l'*Ordinata del Punto T di Intersezione* tra il II lato dell'*Angolo Orientato x* e la *Retta Tangente t alla Circonferenza Goniometrica nell'Origine degli Archi A*. (Notazione: **tan*x***).

12.10.b) Tangente di Angoli Notevoli

In questo paragrafo si studierà il comportamento della *Funzione Tangente* tra $x=0$ e $x = 2\pi$. Intanto, si osserva subito che:

Per $x=0$ e $x = 2\pi$, risulta: $T(+1;\tan x) \equiv (+1;0)$ => **$\tan(0) = \tan(2\pi) = 0$**.

<u>I Quadrante</u>

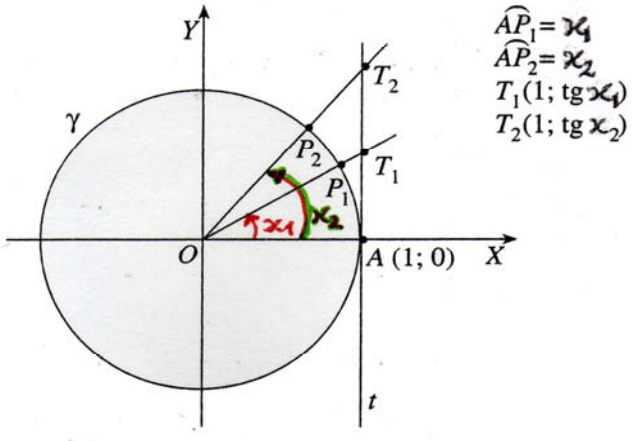
- Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$0 < \text{tg}\,x < +\infty$$

poiché T appartiene al 1° quadrante

Al crescere di α da 0 a $\frac{\pi}{2}$, tg$x$ assume valori positivi via via crescenti.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{tg}\,x = +\infty$ / $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \text{tg}\,x = -\infty$

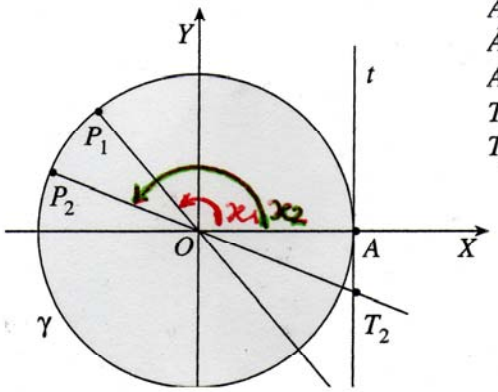


II Quadrante

- Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, si ha:

$$-\infty < \operatorname{tg} x < 0$$

poiché T appartiene al 4° quadrante; al crescere di x da $\frac{\pi}{2}$ a π, anche $\operatorname{tg} x$ cresce passando da valori negativi molto grandi in valore assoluto a valori via via più vicini a zero.



$\widehat{AP_1} = x_1$
$\widehat{AP_2} = x_2$
$A\,(1;0)$
$T_1(1; \operatorname{tg} x_1)$
$T_2(1; \operatorname{tg} x_2)$

- Se $x = \pi$, si ha:

$$\operatorname{tg} \pi = 0$$

poiché $T \equiv A$.

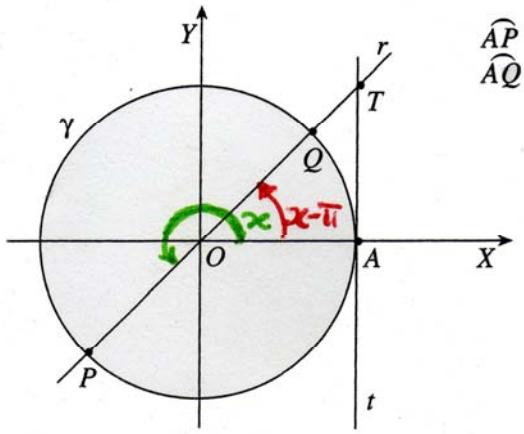
III Quadrante

- Se $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, si ha:

$$0 < \operatorname{tg} x < +\infty$$

poiché T appartiene al 1° quadrante; $\operatorname{tg} \alpha$ assume allora gli stessi valori positivi assunti per $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; infatti risulta

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x \qquad [2.4]$$



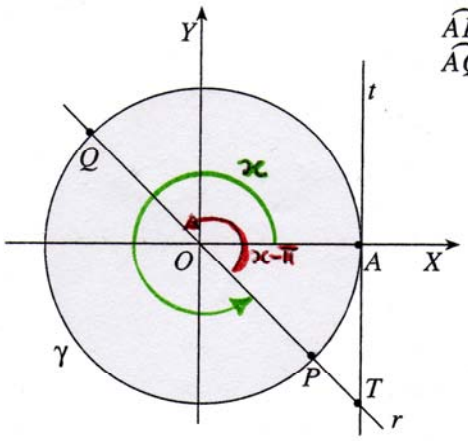
$\widehat{AP} = x$
$\widehat{AQ} = x - \pi$

$\left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$ IV Quadrante

- Se $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, si ha:

$$-\infty < \operatorname{tg} x < 0$$

poiché T appartiene nuovamente al 4° quadrante (fig. 2.21); tg assume gli stessi valori negativi presi nell'intervallo $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, valendo ancora la [2.4].



$\widehat{AP} = x$
$\widehat{AQ} = x - \pi$

- Se $x = 2\pi$, si ha: $\operatorname{tg} 2\pi = 0$ poiché T coincide nuovamente con A.

12.10.c) Periodicità della Funzione Tangente

Come le *Funzioni* $\sin x$ e $\cos x$, anche la *Funzione* $\tan x$ ha valori che al di fuori dell'*Intervallo* $[0:2\pi]$ si ripetono in maniera periodica.

In realtà questa *Funzione* (e come vedremo anche la $\operatorname{cotan} x$) ha sì valori che si ripetono, ma con una maggiore frequenza. In particolare, nell'*Intervallo* $[0:2\pi]$, è facile verificare mediante più letture sulla *Circonferenza Goniometrica* che i valori di $\tan x$ si ripetono due volte.

Ripetendo le letture su tutto l'*Asse Reale*, si verifica che:

"La *Funzione* $f(x) = \tan x$ è una *Funzione Periodica di Periodo* $T = \pi$"

cioè:

$$\tan x = \tan\ (x + k \cdot \pi)\ ;\ \ k \in \mathbb{Z}$$